Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2006-04-19

1. (a) Nej, residualen kan förstoras av matrisens konditionstal.
   (b) Använder man en explicit lösare på ett styvt problem får man ta korta tidssteg, så man använder en implicit lösare i stället.
   (c) exp(1000) ger Inf, 1/Inf blir 0 och log(0) blir -Inf. sin(0) är 0, log(0) är -Inf och atan(-Inf) ger $-\pi/2$.
   (d) $\approx 10^{10} \cdot 10^{-16} = 10^{-6}$.
   (e) x^* satisfierar $f(x^*) = 0$, där $f(x) = 2x - \cos x$. $f(0) = -1 < 0$ och $f(\pi/4) = \pi/2 - 1/\sqrt{2} > 0$. Så att $0 < x^* < \pi/4 \approx 0.8$. Med $x_{k+1} = g(x_k)$, får vi $|g'(x^*)| = |-\sin x^* - 1| > 1$, så att fixpunkten är repulsiv och vi kan inte få konvergens.
   (f) Tag $\mathbf{x}$ där $x_k = 0$, k udda. Plocka ut x_k med jämna index och lägg i vektorn $\mathbf{w}$. Då gäller att $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{B}\mathbf{w}$. Om nu minst något element i $\mathbf{x}$, med jämnt index, är skilt från noll så är $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ så att $\mathbf{B}$ är positivt definit. Matrisen måste ju vara symmetrisk när vi plockar bort rader och kolonner symmetriskt.
   (g) Vi kräver att $\mathbf{I} = (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^T)$. Detta leder till villkoret $(2\alpha + \alpha^2\ \mathbf{u}^T\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så måste $0 = 2\alpha + \alpha^2\ \mathbf{u}^T\mathbf{u} = \alpha(2 + \alpha\mathbf{u}^T\mathbf{u})$. Så svar: $\alpha = -2/(\mathbf{u}^T\mathbf{u})$. Matrisen är symmetrisk för varje α, transponerar man den får man tillbaks samma matris.

2. Vi skriver ekvationen som $1/x - c = 0$. Newtons metod blir $x_{k+1} = 2x_k - cx_k^2$.
   $\epsilon_{k+1} = x_{k+1} - 1/c = 2x_k - cx_k^2 - 1/c = -c(x_k^2 + 1/c^2 - 2x_k/c) = -c(x_k - 1/c)^2 = -c\epsilon_k^2$.

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = w$. Systemet övergår i:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = ty_1y_3 + y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_2 - y_3 + y_1^2 \\ y_4' = y_2 + y_1 + 2y_4 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 1 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 4 \end{array}\right.$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0 y_1^{(0)} y_3^{(0)} + y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \\ y_2^{(0)} + y_1^{(0)} + 2y_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \\ 2 \\ 1 - 2 + 3^2 \\ 1 + 3 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3 \\ 1.2 \\ 2.8 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi får följande ekvationer, när $f(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots, n$ och söker maximalt n:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_1 = 1 \\ w_2/2 + w_1 = 1/2 \\ w_2/4 + w_1 = 1/3 \\ w_2/8 + w_1 = 1/4 \\ w_2/16 + w_1 = 1/5 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

De två första ekvationerna är identiska, men första och tredje ger en entydig lösning $w_1 = 1/6, w_2 = 2/3$. Dessa värden satisfierar den fjärde, men inte den femte ekvationen, så maximalt gradtal är tre (fel för x^4).

b) Ekvidistant interpolation ger ofta kraftiga svängningar vid ändarna (Runges fenomen) så att derivera p kan ge ett dåligt resultat. At beräkna koefficienterna i polynomet kan ge numeriska bekymmer. Vandermondematris torde bli illa konditionerad, t.ex. En symmetrisk differensapproximation har ordning två och är tämligen bra, dock är intervallets längd väl stor.

5. Resultatet är en skalär. Låt oss lagra resultatet i α.

$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/6$ +, *
lös $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{t} = \mathbf{a}$	n^2 +, *
$\beta = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\gamma = \mathbf{t}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\alpha = \alpha + \beta + 2\gamma$	innehåller svaret

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*.

6. Modell: $b = x_1 + x_2 t$, så minimera $||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ där första kolonnen i **A** består av ettor och den andra innehåller t-värdena. Normalekvationerna

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n t_k \\ \sum_{k=1}^n t_k & \sum_{k=1}^n t_k^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n b_k \\ \sum_{k=1}^n t_k b_k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 27.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 50.6 \\ 121 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ 4.4 \end{bmatrix}$$