Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2008-08-18

1. (a) Nej, inte om vi inte har en uppfattning om $\kappa(\mathbf{A})$. Det gäller ju att

$$\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||}{||\mathbf{x}||} \leq \kappa(\mathbf{A})\frac{||\mathbf{A}\mathbf{y}-\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$

(b) Låt $\mathbf{a}_k$ beteckna kolonn k i $\mathbf{A}$. Då gäller

$$|a_{j,k}| \leq ||\mathbf{a}_k||_1 \leq \max_i ||\mathbf{a}_i||_1 = ||\mathbf{A}||_1$$

(c) `1/0=Inf`, `log(Inf)=Inf`, `1/Inf=0`, `log(0)=-Inf`. `exp(Inf)=Inf`, `exp(0)=1`. Så svaret blir `-Inf, 1`.

(d) För små x kommer vi att få olika funktionsvärden, men för stora x så kommer e^{-x} att skiftas ut när det adderas/subtraheras till/från e^x. Vid fullständig utskiftning så kommer därför $\sinh x = \cosh x = e^x/2$ och vi får skillnaden noll. Fullständig utskiftning inträffar när $e^x/e^{-x} \approx 10^{16}$ dvs. när $2x\log_{10} e = 16$ så att $x \approx 18.4$. Vi förväntar oss alltså att $\sinh x \neq \cosh x$, $x = 1, \ldots, 18$ men att vi får samma värden för $x \geq 19$. Svaret torde därför vara 18.

(e) Interpolationspolynomet ger ofta kraftiga svängningar vid ändarna (Runges fenomen). Splineinterpolation ger ett lugnare uppförande, men funktionen är inte lika deriverbar (samt är besvärligare att representera och att evaluera).

(f) $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k + \lambda h y_k = (1+h\lambda)y_k$. Så, $y_k = (1+h\lambda)^k y_0 = (1+h\lambda)^k$. $y_k \to 0$ då $|1+h\lambda| < 1$. Låt $\lambda = \lambda_1 + i\ \lambda_2$, där $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$|1+h\lambda|^2 = |1+h\lambda_1 + ih\lambda_2|^2 = 1 + 2h\lambda_1 + h^2\lambda_1^2 + h^2\lambda_2^2$$

Detta är en parabel i h och för att hitta de h som ger $|1+h\lambda| < 1$ studerar vi likhet

$$|1+h\lambda|^2 = 1 \Leftrightarrow 1 + 2h\lambda_1 + h^2\lambda_1^2 + h^2\lambda_2^2 = 1$$

($h > 0$ är nödvändigt, så vi kan dividera med h). Detta ger (eftersom $\lambda_1 < 0$) att

$$0 < h < \frac{-2\lambda_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{-2\lambda_1}{|\lambda|^2}$$

(g) Gausselimination ger:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & \beta \\ 0 & 0 & 1-\beta^2/(1-\alpha^2) \end{bmatrix}$$

så att Choleskyfaktoriseringen blir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \sqrt{1-\alpha^2} & 0 \\ 0 & \beta/\sqrt{1-\alpha^2} & \sqrt{1-\beta^2/(1-\alpha^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\alpha^2} & \beta/\sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2/(1-\alpha^2)} \end{bmatrix}$$

För att $\mathbf{A}$ skall vara positivt definit krävs $1-\alpha^2 > 0$ och $1-\beta^2/(1-\alpha^2) > 0$, dvs. $\alpha^2 < 1$ och $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

2. Gradienten blir $[y^2 + y\cos(xy), 2xy + x\cos(xy)]^T$, varför Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \mathbf{J}(x_k, y_k)^{-1} \begin{bmatrix} y_k^2 + y_k\cos(x_k y_k) \\ 2x_k y_k + x_k\cos(x_k y_k) \end{bmatrix}$$

där

$$\mathbf{J}(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} -y_k^2\sin(x_k y_k) & 2y_k + \cos(x_k y_k) - x_k y_k \sin(x_k y_k) \\ 2y_k + \cos(x_k y_k) - x_k y_k\sin(x_k y_k) & 2x_k - x_k^2\sin(x_k y_k) \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$ samt $y_4 = z' = y_3'$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t + (y_1 + y_3)y_2 + y_4 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 y_3/(y_2 + t) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = -3 \\ y_3(2) = 1 \\ y_4(2) = 2 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_2^{(0)} \\ t_0 + (y_1^{(0)} + y_3^{(0)})y_2^{(0)} + y_4^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_1^{(0)} y_3^{(0)}/(y_2^{(0)} + t_0) \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2.7 \\ -3.8 \\ 1.2 \\ 1.7 \end{bmatrix}$$

4. a)

$$p(t) = 1\,\frac{(t-2)(t-4)}{(-1-2)(-1-4)} + 3\,\frac{(t-(-1))(t-4)}{(2-(-1))(2-4)} + 9\,\frac{(t-(-1))(t-2)}{(4-(-1))(4-2)}$$

b) Svaret är nej, ty $p = q$. Bilda nämligen skillnaden $p - q$. Det gäller att $p(t) - q(t) = 0,\ t \in [a, b]$. $p - q$ har alltså oändligt många nollställen och måste därmed vara nollpolynomet, varför $p = q$ (så att $p(t) = q(t)$ för **alla** t).

5. Resultatet är en vektor och eftersom $(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^k = (\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{k-1}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ kan uttrycket skrivas:

$$\mathbf{A}^{-2}\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^2 + (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^4\right)\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a} = \left(1 + \mathbf{a}^T\mathbf{a} + (\mathbf{a}^T\mathbf{a})^3\right)\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a} =$$

$$\left(1 + \mathbf{a}^T\mathbf{a} + (\mathbf{a}^T\mathbf{a})^3\right)\left(\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a}\right)\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a}$$

$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	spara $\mathbf{a}$
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{a}$	n +, *
$\mathbf{t} = (1 + \alpha + \alpha^3)\ (\mathbf{a}^T\mathbf{t})\ \mathbf{t}$	n +, 2n *

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Låt c_2 vara det optimala värdet för tvånormen, så c_2 minimerar $||\mathbf{x}c_2 - \mathbf{y}||_2$. Låt analogt c_∞ minimera $||\mathbf{x}c_\infty - \mathbf{y}||_\infty$. c_2 ges av normalekvationerna:

$$c_2 = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \frac{n\delta + \sum_{k=1}^n k\cdot\alpha k}{\sum_{k=1}^n k^2} = \alpha + \frac{n\delta}{n(n+1)(2n+1)/6} = \alpha + \frac{6\delta}{(n+1)(2n+1)} \approx \alpha + \frac{3\delta}{n^2}$$

För c_∞ noterar vi att $x \to \alpha x$ är en strängt växande direkt proportionalitet, så att maximala skillnaden, mellan linjen och punkterna, antas för $x = n - 1$ eller $x = n$. För optimalitet måste dessa skillnader vara lika (med olika tecken, eftersom linjen måste ligga under (x_n, y_n) och över (x_{n-1}, y_{n-1})). Alltså:

$$(n-1)c_\infty - \alpha(n-1) = (\alpha n + \delta) - nc_\infty \Rightarrow c_\infty = \alpha + \frac{\delta}{2n-1} \approx \alpha + \frac{\delta}{2n}$$

och vi ser att δ har mycket större inverkan på c_∞ än på c_2.