Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2008-03-27

1. (a) Se förel. Partiell pivotering förstör symmetrin.

   (b)
$$||\mathbf{A}||_1 \leq n \max_{j,k} \ |a_{j,k}| \leq n \ ||\mathbf{A}||_\infty$$

   (c) `1/0=Inf`, `exp(Inf)=Inf`, `sin(Inf)=NaN`. `-1/0=-Inf`, `exp(-Inf)=0`, `sin(0)=0`. Så svaret blir `NaN, 0`.

   (d) Låt $\lambda = -20000$, då är $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k + \lambda h y_k = (1 + h\lambda)y_k$.
   Så, $y_k = (1 + h\lambda)^k y_0 = (1 + h\lambda)^k$. $y_k \to 0$ då $|1 + h\lambda| < 1$ eller
$$0 < h < \frac{-2}{\lambda} = 10^{-4}$$
   Så antalet steg är minst 10^4.

   (e) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, där $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ är reell. Alltså gäller att
$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} > 0$$
   eftersom $\mathbf{A}$ är positivt definit och $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||_2^2 > 0$.

   (f) Man kan räkna med en algoritm eller resonera sig fram, jag väljer det senare. $\mathbf{Q}$ skall vara ortogonal där $\mathbf{q}_1$ är parallell med första kolonnen i $\mathbf{A}$, dvs. $\mathbf{q}_1 = [1, 1]^T/\sqrt{2}$. $\mathbf{q}_2$ skall vara ortogonal mot $\mathbf{q}_1$, så $\mathbf{q}_2 = \pm[-1, 1]^T/\sqrt{2}$. $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}$. Alltså
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2. Vi löser ekvationen $(1/x) - y = 0$ och den resulterande Newtoniterationen blir:
   $x_{k+1} = x_k - (1/x_k - y)/(-1/x_k^2) = x_k + x_k - yx_k^2 = x_k(2 - yx_k)$.
$$x_1 - 1/y = (1/y + \epsilon)(2 - y(1/y + \epsilon)) - 1/y = 2/y + 2\epsilon - y(1/y^2 + 2\epsilon/y + \epsilon^2) - 1/y = -y\epsilon^2$$
   Så, kvadratisk konvergens.

3. Inför $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = y_2' = v'$ samt $y_4 = y_3' = v''$. Systemet övergår i:
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 3(y_3)^2 - y_4 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 - y_2 - y_3y_4 + t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-2) = 0 \\ y_2(-2) = -1 \\ y_3(-2) = 2 \\ y_4(-2) = -3 \end{cases}$$
   Så
$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + 2y_2^{(0)} - 3(y_3^{(0)})^2 - y_4^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_1^{(0)} - y_2^{(0)} - y_3^{(0)}y_4^{(0)} + t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1 \\ -0.8 \\ 1.7 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

4. a) Den allmänna formen är;

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2)$$

Vi får det undertriangulära ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 7/15 \end{bmatrix}$$

så

$$p(t) = 1 + (2/3)(t + 1) + (7/15)(t + 1)(t - 2)$$

b) Se förel.

5. Notera att $\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})^T$. Algoritmen kan formuleras som följer:

beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUb} = \mathbf{b}$	n^2 +, *, skriv över **b**
bilda $\gamma = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$	n +, *, nya **b**
lös $\mathbf{LUa} = \mathbf{a}$	n^2 +, *, samma faktorisering, skriv över **a**
bilda $\gamma = \gamma + \mathbf{b}^T\mathbf{a}$	n +, *, nya $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

Vi behöver inget extra minne. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Logaritmera:

$$\log r = \log \alpha + E/T$$

Låt $x_1 = \log \alpha$ och $x_2 = E$. Det linjära problemet kan då skrivas $\min_{\mathbf{x}} \ ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ där en rad i **A** har utseendet $[1,\ 1/T_k]$ och motsvarande element i **b** är $\log r_k$. När vi har löst det linjära problemet sätt vi $\alpha = e^{x_1}$ och $E = x_2$, och nej, det borde inte leda till några problem.