Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2005-08-19, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-mail: thomas@math.chalmers.se.
Telefonvakt:	tel: 076-272 18 61
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, Eklandag. 86. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	Måndag på www.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Vilka fixpunkter har fixpunktsiterationen $x_{k+1} = x_k^2$ och vilka kan man få konvergens mot om x_0 ligger nära fixpunkten men inte är lika med densamma? (2p)

   (b) Vad är fördelen med BLAS3 jämfört med BLAS1 ur prestandasynpunkt (svara inte för vagt)? (1p)

   (c) Ange en väsentlig fördel och en väsentlig nackdel med Simpsons formel för integration. (1p)

   (d) `x` och `y` är två variabler i Matlab, med `x` $\approx$ `y` ≈ 1. Vi bildar `d = 1 / abs(x - y)`.
   Antag att `abs(x - y)` inte blir `0`, ungefär hur stort kan då `d` bli maximalt? Vad är svaret om vi släpper på villkoret att båda talen är ungefär ett (`abs(x - y)`$\neq 0$ även i detta fall). (1p)

   (e) Vilken av `s1` och `s2` ligger närmast det exakta värdet (vi kör i Matlab)? Slarva inte med utredningen!
   ```
   x = 0.1; s1 = 0; for k = 1:200, s1 = s1 + 2*log(x) / sin(x); x=x*0.1; end, s1,
   x = 0.1; s2 = 0; for k = 1:200, s2 = s2 + log(x*x) / sin(x); x=x*0.1; end, s2
   ```
   (1p)

   (f) Antag att matrisen $\mathbf{Q}$ är en ickesingulär $n \times n$-matris och antag att $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris vars n diagonalelement är positiva. Visa att $\mathbf{QDQ}^T$ är symmetrisk **och** positivt definit. Specialfall, som t.ex. $n = 2$ eller sifferexempel ger inga poäng. (2p)

   (g) Låt $\mathbf{Q} \in \Re^{n\times n}$ vara en kvadratisk ortogonal matris och låt $\mathbf{x} \in \Re^n$ vara en godtycklig vektor. Visa att $||\mathbf{Qx}||_2 = ||\mathbf{x}||_2$. Använd detta resultat för att visa att $||\mathbf{QA}||_2 = ||\mathbf{A}||_2$ där $\mathbf{A} \in \Re^{n\times r}$ är en godtycklig matris. (2p)

2. a) Vi vill använda Newtons metod för att hitta en **symmetrisk** 2×2-matris sådan att summan av kvadraterna på matrisens alla element är 118. Matrisen determinant skall var -41. Slutligen är produkten av matrisens alla element 392. Sätt upp Newtons metod för problemet. (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u och v är skalära funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} v' = tvu'' + u' \\ u''' = u - u' + v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(t_0) = 3 \\ u(t_0) = 1, u'(t_0) = 2, u''(t_0) = 4 \end{cases} \quad t_0 = -2, \quad (3\text{p})$$

4. a) f är en funktion där $f(x)$ existerar för alla $x \in \mathbf{R}$. f är dessutom kontinuerligt deriverbar, men funktionen är i övrigt godtycklig. p är interpolationspolynomet som interpolerar f i punkterna $(-1, f(-1))$ och $(1, f(1))$. Existerar det en konstant M, oberoende av f, sådan att $|p(0) - f(0)| \leq M$? Ge bevis (om det är sant) eller motexempel (om det är falskt). (1p)

   b) Bevisa att det finns ett entydigt bestämt polynom av högst grad n som satisfierar

$$p(\tau) = y_0, \quad p^{(k)}(\tau) = y_k, k = 1, \ldots, n$$

   $\tau, y_0, y_1, \ldots, y_n$ är givna värden, $n \geq 1$. (Inga poäng för specialfall eller exempel.) (2p)

5. Givet den osymmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, med n element, vill vi beräkna följande kvantitet:

$$\mathbf{a}^T \, (\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^{-2} + \mathbf{A}^2) \, \mathbf{b}\mathbf{b}^T$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Lös följande minstakvadratproblem. Lösningen beror av vinkeln ψ, som antas vara känd. Visa också att residualvektorn är ortogonal mot matrisens bildrum (i detta exempel). Förklara, i geometriska termer, varför residualvektorn **inte** beror på vinkeln, ψ. Ange dessutom alla **b**-vektorer där residualvektorn blir nollvektorn (**b** är som vanligt vektor som står till höger om $\mathbf{x}-$ i problemformuleringen).

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2$$

   (3p)