Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2006-01-16, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-mail: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
   Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Vi har en matris, $\mathbf{A}$ och en vektor $\mathbf{b}$, som består av mätdata. Ett typiskt mätvärde är 101.233 (korrekt avrundat). Vi löser $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\kappa(\mathbf{A}) \approx 10^4$. Lösningen $\mathbf{x}$ har element som ligger i intervallet $[1, 5]$. Uppskatta hur många säkra siffror vi har i $\mathbf{x}$. (1p)

   (b) Ange en väsentlig för- respektive nackdel med explicita metoder för ODE. (1p)

   (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `x = 0; [exp(x)/x/sin(x)/x, exp(x)/x/exp(x)/x]` (1p)

   (d) Vilken av `s1` och `s2` ligger närmast det exakta värdet (vi kör i Matlab)? Slarva inte med utredningen!

```
>> x  = logspace(10, -10, 21);
>> s1 = sum(sqrt(x.^2 + 1) - x)
>> s2 = sum(1 ./ (sqrt(x.^2 + 1) + x) );    % (1p)
```

   (e) Ge en (grov) uppskattning av fixpunkten, x^*, till iterationen $x_{k+1} = e^{-x_k} - x_k$? Kan vi få konvergens mot fixpunkten givet att x_0 ligger nära x^* men där $x_0 \neq x^*$? (2p)

   (f) Antag att $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$ är symmetrisk och positivt definit. Visa att $\mathbf{A}(1:k, 1:k), k = 1, \dots, n-1$ (Matlabnotation) är positivt definita. (2p)

   (g) Låt $\mathbf{Q} \in \Re^{n\times n}$ vara en kvadratisk ortogonal matris. Visa att $||\mathbf{Q}||_2 = 1$ och att $\kappa_2(\mathbf{Q}) = 1$ (där κ_2 betecknar konditionstalet i tvånorm). (2p)

---

2. a) Vi vill använda Newtons metod för att hitta en **övertriangulär** 2×2-matris, $\mathbf{A}$, sådan att:

$$\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u och v är skalära funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} v' = tvu'' + u' \\ u''' = u - u' + v^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3 \\ u(2) = 1, u'(2) = 2, u''(2) = 4 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

4. a) Bestäm w_1, w_2, x_1 så att kvadraturformeln nedan får maximalt polynomiellt gradtal.
Vad är detta gradtal?

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1), \quad \text{(1.5p)}$$

b) Givet $(t_k, y_k), k = 1, \ldots, n$, $2 \leq n$, med $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ existerar det garanterat ett moniskt polynom (dvs. ledande koefficienten är ett) av grad n så att $p(t_k) = y_k, k = 1, \ldots, n$? Ge bevis (om det är sant) eller motexempel (om det är falskt). (1.5p)

5. Givet den osymmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, med n element, vill vi beräkna följande kvantitet (Du kan utgå från att värdet existerar):

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}) \ (\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{b})^{-1} \ (\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a})$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. En Householdermatris kan skrivas $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T/(\mathbf{u}^T\mathbf{u})$.
a) Bevisa att $\mathbf{H}$ är symmetrisk och ortogonal.
b) Antag att $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Visa att $\mathbf{H}$ har ett egenvärde som är -1 och att övriga är ett.
c) Visa att alla egenvärden till en kvadratisk ortogonal matris har absolutbelopp ett. Matrisen behöver inte vara symmetrisk! (3p)