Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2006-04-19, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Vi har en approximativ lösning, $\mathbf{y}$, till ett linjärt ekvationssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
   Vi vet att $||\mathbf{Ay} - \mathbf{b}||_2 \approx 10^{-10}$. Kan vi av detta dra slutsatsen att $||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_2 \approx 10^{-10}$? (1p)

   (b) Varför vill man inte använda explicita lösare för styva ODE-problem? Vad gör man i stället? (1p)

   (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `[log(1/exp(1000)), atan(log(sin(0)))]` (1p)

   (d) Ungefär vad torde följande Matlabprogram ge för utskrift?
   `x = 1; for k = 1:1000, x = x / 2; if 1e10 + x == 1e10, break; end; end; x` (1p)

   (e) Ge en (grov) uppskattning av fixpunkten, x^*, till iterationen $x_{k+1} = \cos x_k - x_k$? Kan vi få konvergens mot fixpunkten givet att x_0 ligger nära x^* men där $x_0 \neq x^*$? (2p)

   (f) Antag att $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}, n > 1$ är symmetrisk och positivt definit. Vi bildar en mindre matris, $\mathbf{B}$, genom att i $\mathbf{A}$ stryka alla rader och kolonner med udda nummer (det som är kvar bildar $\mathbf{B}$). Visa att $\mathbf{B}$ är positivt definit. (2p)

   (g) Låt $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ där $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ är en kolonnvektor. För vilka reella tal α är $\mathbf{A}$ symmetrisk och ortogonal? (2p)

Var god vänd!

2. Datorer som ej har hårdvara för division utnyttjar ibland Newtons metod för att beräkna $1/c$ givet $c > 0$. Ställ upp Newtoniterationen för problemet (iterationen får givetvis ej innehålla någon division). Låt $\epsilon_k = x_k - 1/c$ (där $x_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ är de approximationer Newtons metod ger). Bevisa att $\epsilon_{k+1} = -c\epsilon_k^2$. (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u, v och w är skalära funktioner av tiden t.)

$$\left\{\begin{array}{l} v' = tvu' + u \\ u'' = u - u' + v^2 \\ w' = u + v + 2w \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} v(2) = 3 \\ u(2) = 1, u'(2) = 2 \\ w(2) = 4 \end{array}\right. \quad \text{(3p)}$$

4. a) Bestäm w_1, w_2 så att kvadraturformeln nedan får maximalt polynomiellt gradtal. Vad är detta gradtal?

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(1/2) + w_1 f(1), \quad \text{(1.5p)}$$

b) En person vill approximera $f'(0.5)$. Det enda som är känt är $f(k), k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Personen ber Dig om hjälp och vill veta för- och nackdelar med följande två approximationer. a) Beräkna interpolationspolynomet, $p(t)$, som interpolerar $f(t)$ för $t = 0, 1, 2, \ldots, 9$ och beräkna $p'(0.5)$. b) Bilda approximationen $f(1) - f(0)$. Ge personen ett informativt svar! (1.5p)

5. Givet den symmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorn $\mathbf{a}$ med n element, vill vi beräkna följande kvantitet (Du kan utgå från att värdet existerar):

$$\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Bestäm den räta linje som bäst (i minstakvadratmening) approximerar mätpunkterna $(t_k, b_k), k = 1, \ldots, n$, $n = 11$. Du vet att:

$$\sum_{k=1}^n t_k = 0, \; \sum_{k=1}^n t_k^2 = 27.5, \; \sum_{k=1}^n t_k^3 = 0, \; \sum_{k=1}^n b_k = 50.6, \sum_{k=1}^n b_k^2 = 773.74, \; \sum_{k=1}^n t_k b_k = 121 \qquad \text{(3p)}$$