Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2006-08-21, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!
   (a) $\mathbf{A}$ är en kvadratisk, ickesingulär matris, och $\alpha \neq 0$ ett reellt tal. Visa att $\kappa(\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A}^{-1}) = \kappa(\alpha\mathbf{A})$. (2p)
   (b) Vilken är den grundläggande idén i Matlabs `ode45` när det gäller att bestämma steglängden? (1p)
   (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `[exp(1/tan(0)), tan(log(0))]` (1p)
   (d) Ungefär vad torde följande Matlabprogram ge för utskrift?
   `x = 1; for k = 1:10000, x = 1.5*x; if 1e10+x == 1e12+x, break; end; end; x` (1p)
   (e) p är ett tredjegradspolynom med reella koefficienter. Visa att iterationen $x_{k+1} = p(x_k)$ alltid har minst en reell fixpunkt. (1p)
   (f) Låt $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ där $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är reella tal. För vilka $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är $\mathbf{A}$ positivt definit? För vilka $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är $\mathbf{A}$ ortogonal? Jag vill ha så generella formuleringar som möjligt. (2p)
   (g) Använd Choleskyfaktorisering för att avgöra för vilka α och β matrisen $\mathbf{A}$ är positivt definit, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \qquad (2p)$$

Var god vänd!

---

2. Du har en dator som saknar stöd både för division och kvadratrot. Visa hur man kan utnyttja Newtons metod för att beräkna $1/\sqrt{c}$ givet $c > 0$. Formulera ekvationen och ställ upp Newtoniterationen för problemet (iterationen får givetvis ej innehålla någon division eller kvadratrot). (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u, v och w är skalära funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} v' = tvu' + u \\ u'' = u - u' + v^2 \\ w' = u + v + 2w \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3 \\ u(2) = 1, u'(2) = 2 \\ w(2) = 4 \end{cases} \quad (3\text{p})$$

4. a) Bestäm α så att kvadraturformeln nedan får maximalt polynomiellt gradtal.
Vad är detta gradtal?

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{f(0) + \alpha f(1/2) + f(1)}{2 + \alpha}, \quad (1.5\text{p})$$

b) Ge en väsentlig fördel respektive en väsentlig nackdel med att använda splineinterpolation i stället för interpolation med interpolationspolynomet. (1.5p)

5. Givet den symmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorn $\mathbf{a}$ med n element, vill vi beräkna följande kvantitet (Du kan utgå från att värdet existerar):

$$\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{A}^2\mathbf{a}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ och $\mathbf{a}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi vill lösa ett linjärt minstakvadratproblem $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ där $\mathbf{A}$ har följande speciella struktur. $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m]$ där $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ är reella $n \times p$-matriser där $mp < n$. Det gäller vidare att $\mathbf{A}_j^T\mathbf{A}_k = \mathbf{0}, j \neq k$. Du kan utgå ifrån att $\mathbf{A}$ är mycket välkonditionerad. Beskriv en snabb metod, för att lösa problemet, som utnyttjar $\mathbf{A}$:s struktur. (3p)