Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2007-01-19, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, anslagstavlan vid rum MVF22. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Ange en väsentlig fördel med att använda LU-faktorisering jämfört med att använda Gausselimination (för att lösa linjära ekvationssystem). (1p)

(b) Ange en fördel samt en nackdel med flerstegsmetoder (jämfört med enstegsmetoder). (1p)

(c) Vi vill approximera

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

då $n = 200$ och $k = 40$. Skriv ett Matlabprogram som gör detta på ett **bra** sätt. Du får använda funktionen `prod(v)` som bildar produkten av elementen i vektorn `v`. Du får **inte** använda Matlabs `nchoosek` (som beräknar binomialkoefficienter). (1p)

(d) Ungefär vad torde följande Matlabprogram ge för utskrift?
`x = 1e-145; for k = 1:50000, x = 10*x; if 1e-134+x == 1e-140+x, break; end; end; x` (1p)

(e) Låt $x_{k+1} = g(x_k)$, där $g(x) = x - 1/2 + \sin x$. Hur många fixpunkter har g? Visa att g har minst en attraktiv fixpunkt och minst en repulsiv fixpunkt. (2p)

(f) Låt $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ där $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är reella tal, alla skilda från noll. Bevisa att

$$\kappa_1(\mathbf{A}) = \kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\max_j\ |\alpha_j|}{\min_j |\alpha_j|}$$

$\kappa_1(\mathbf{A})$ respektive $\kappa_2(\mathbf{A})$ betecknar matrisens konditionstal i 1- samt 2-norm. (2p)

(g) $\mathbf{A}$ är en symmetrisk och positivt definit matris. Visa att $\max_{j,\ k}\ |a_{jk}|$ ligger på diagonalen.
Ledning: vektorn $\mathbf{e}_j + \sigma\ \mathbf{e}_k$ är användbar. (2p)

Var god vänd!

2. Vi vill hitta tre reella tal som uppfyller följande tre villkor: deras summa skall vara ett, summan av kvadraterna på talen skall vara fem och slutligen skall summan av kuberna på talen vara fyra. Ställ upp Newtons metod för detta system av ekvationer. (3p)

3. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.
b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$.

$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, är en **vektorvärd** funktion av tiden t och $v(t)$ är en reellvärd funktion.

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (v \cdot t \cdot \mathbf{r})/||\mathbf{r}||_2 \\ v' = r_1 - r_2 + t \cdot v \end{cases}, \quad r_1(2) = 3,\ r_2(2) = 4,\ v(2) = 5 \qquad \text{(3p)}$$

4. a) Följande Matlab-kommando ger en dålig approximation av integralen:

```
quadl('cos(x).^0.8 ./ sin(x).^0.9', 0, 1)
```

Skriv om uttrycket på lämpligt sätt så att man kan använda `quadl` för att beräkna en bra approimation av integralen. (1.5p)

b) Bestäm interpolationspolynomet, på **Lagranges form**, som interpolerar i punkterna, $(1, 2)$, $(3, -1)$ och $(5, 3)$. (1.5p)

5. Givet den osymmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorn $\mathbf{a}$ med n element, vill vi beräkna följande kvantitet (Du kan utgå från att värdet existerar):

$$\frac{\mathbf{a}^T(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{A}\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{A}^{-2})\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ och $\mathbf{a}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en termistor, dvs. ett motstånd vars resistans, R, beror av temperaturen, T. Vi har följande modell för sambandet mellan R och T:

$$R \approx e^{(1+p_1T+p_2T^2)/(p_3+p_4T)}$$

Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 och p_4 givet mätvärden $(T_1, R_1), (T_2, R_2), \ldots, (T_m, R_m)$. Gör en lämplig transformation och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem.
Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! (3p)