

**Tentamen:** Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2007-04-13, V-huset.

Skrivtid: 08.30-13.30.  
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.  
Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.  
Resultat: Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.  
Lösningsförslag: På www efter kl. 19.  
Gräns för godkänt: 12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.  
**Hjälpmedel:** Inga (förutom godkända ordlistor).

**Iakttag följande:**

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!

**Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!**

- (a) Vi härledde en speciell metod för att lösa  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  då  $\mathbf{A}$  är symmetrisk och positivt definit. Vad kallas metoden och varför nöjde vi oss inte med att använda en metod för allmänna kvadratiska och inverterbara  $\mathbf{A}$ ? (1p)
- (b) Vi använder en ODE-lösare och får ett felmeddelande att lösaren får ta många korta steg. Vilka slags egenskaper hos problemet skulle kunna orsaka felutskriften? Ange två orsaker. (1p)
- (c) Antag att vi försöker approximera  $e^{-20}$  med följande trunckerade Taylorutveckling (i Matlab):  
`x = -20; k = 1:174; exp_appx = 1 + sum(x.^k ./ factorial(k))`  
`factorial(k)` ger en vektor av fakulteter och `k`-vektorn är vald så att de trunckerade termerna skulle ha beräknats till exakt noll. Man får svaret `exp_appx = 4.1736e-09`. Det korrekta värdet är ungefär `2.0612e-09`. Förklara varför approximationen blir så rysligt dålig. (1p)
- (d) Ungefär vad torde följande Matlabprogram ge för utskrift? Ledning:  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^8 = \pi^8/9450$ .  
`s=0; for k=1:100000, st=s; s=s+1/k^8; if s == st, break, end, end, k` (1p)
- (e) Vi vill beräkna  $x^* = 2^{1/3}$ . Betrakta fixpunktsiterationen,  $x_{k+1} = x_k + \alpha(x_k^3 - 2)$ , där  $\alpha$  är reelt tal. För vilka  $\alpha$  är  $x^*$  en kontraktiv fixpunkt? (2p)
- (f)  $\mathbf{A}$  är en  $m \times n$ -matris och  $\mathbf{Q}$  är en ortogonal matris (sådan att  $\mathbf{QA}$  är definierad). Bevisa att

$$\|\mathbf{QA}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \quad (2p)$$

- (g)  $\mathbf{A}$  är en symmetrisk och positivt definit matris av ordning  $n$ . Visa att varje delmatris,  $\mathbf{A}_{jk}$ , också är positivt definit, där:

$$\mathbf{A}_{jk} = \begin{bmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j < k \leq n \quad (2p)$$

**Var god vänd!**

2. Vi vill lösa följande system med hjälp av Newtons metod, där  $f$  är en reellvärd funktion av de reella variablerna  $x_1$  och  $x_2$ .

$$\begin{cases} (f(x_1, x_2))^2 + \sin(f(x_1, x_2)) = 1 \\ 3f(x_1, x_2) + x_1^2 + x_2 = 3(f(x_1, x_2))^3 \end{cases}$$

Formulera Newtons metod för problemet (för en allmän funktion  $f$ ). (3p)

3. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.  
 b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden  $h = 0.1$ .

$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$ , är en **vektorvärd** funktion av tiden  $t$  och  $v(t)$  är en reellvärd funktion.

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (v \cdot t \cdot \mathbf{r}) / \|\mathbf{r}\|_1 \\ v' = r_1 - r_2 + t \cdot v \end{cases}, \quad r_1(2) = 6, \quad r_2(2) = 4, \quad v(2) = 5 \quad (3p)$$

4. a) Följande Matlab-kommando ger en dålig approximation av integralen:

```
quadl('(1 + x) .* cos(x) ./ sin(x).^0.8', 0, 1)
```

Skriv om uttrycket på lämpligt sätt så att man kan använda `quadl` för att beräkna en bra approximation av integralen. (1.5p)

- b) Bevisa att det finns ett entydigt bestämt polynom av grad högst  $n - 1$  som satisfierar

$$p(k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \geq 2$$

(Inga poäng för specialfall eller exempel.) (1.5p)

5. Givet den osymmetriska och ickesingulära matrisen  $\mathbf{A}$  av ordning  $n$ , kolonnvektorn  $\mathbf{a}$  med  $n$  element, vill vi beräkna följande kvantitet:

$$(2\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{A}\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{A}^{-2})\mathbf{a}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om  $\mathbf{A}$  är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i  $n$ )?  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{a}$  behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Här följer ett verkligt fysikproblem, Vogel-Fulcher-Tammans modell:

$$y \approx a e^{E/(t-T)}$$

Observera att hela uttrycket  $E/(t - T)$  utgör exponent. Vi vill bestämma parametrarna  $a$ ,  $E$  och  $T$  givet mätvärden  $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_m, y_m)$ , där alla  $y$ -värden är positiva. Gör en lämplig transformation samt inför nya parametrar och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem. Visa slutligen hur  $a$ ,  $E$  samt  $T$  kan beräknas från minstakvadratproblemets lösning.

Matrisen  $\mathbf{A}$  samt vektorerna  $\mathbf{b}$  och  $\mathbf{x}$  skall redovisas! (3p)