Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2008-01-18, M-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
   Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Vi använder Choleskyfaktorisering för att lösa $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, vilket ger en approximativ lösning $\mathbf{y}$. Det gäller att $||\mathbf{Ay} - \mathbf{b}||_\infty \approx 10^{-15}$. Säger det något om $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_\infty$? Förklara! (1p)

   (b) Givet matrisen $\mathbf{A}$, bevisa att $\max_{j,k} |a_{j,k}| \leq ||\mathbf{A}||_1$. (1p)

   (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
   `log(1/log(1/0)), exp(1/exp(1/0))` (1p)

   (d) Vilken utskrift ger följande Matlabrad: `sum(sinh(1:710) ~= cosh(1:710))` ?
   Ledning: `1:710` ger varken upphov till `Inf` eller `NaN`. `~=` betyder skilt ifrån. Logiskt sant representeras av ett och falskt av noll. Räknehjälp: `log10(exp(1)) = 4.3429e-01`, `log(10) = 2.3026`. (1p)

   (e) Ge en väsentlig fördel respektive en väsentlig nackdel med att använda splineinterpolation i stället för interpolation med interpolationspolynomet. (2p)

   (f) Vi använder Eulers metod för att lösa, $y' = \lambda y,\ y(0) = 1$, där λ är ett **komplext** tal med **negativ realdel**. För vilka tidssteg, h, ger metoden approximationer, y_k, för vilka gäller att $y_k \to 0, k \to \infty$? (2p)

   (g) Beräkna $\mathbf{A}$:s Choleskyfaktorisering och använd den för att avgöra för vilka α och β matrisen $\mathbf{A}$ är positivt definit, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad (2p)$$

Var god vänd!

2. Vi kan använda Newtons metod för att försöka hitta en stationär (kritisk) punkt till en reellvärd funktion, $f(x,y)$, genom att lösa systemet $\text{grad} f(x,y) = \mathbf{0}$, där grad betecknar gradientvektorn och $\mathbf{0}$ är nollvektorn. Ställ upp Newtons metod för detta system då $f(x,y) = xy^2 + \sin(xy)$. (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (v och z är skalära funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} v'' = t + (v+z)v' + z' \\ z'' = zv/(v'+t) \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3, \; v'(2) = -3 \\ z(2) = 1, \; z'(2) = 2 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

4. a) Bilda interpolationspolynomet **på Lagranges form**, som interpolerar i punkterna $(-1,1)$, $(2,3)$ och $(4,9)$. (1.5p)

   b) p och q är två polynom som uppfyller $p(t) = q(t)$ för alla t i intervallet $[a,b]$, där $a < b$. Existerar det $c < a$ så att $p(c) \neq q(c)$? Ordentlig motivering krävs! (1.5p)

5. Givet den osymmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorn $\mathbf{a}$ med n element, vill vi beräkna följande kvantitet:

$$\mathbf{A}^{-2}\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^2 + (\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^4\right)\mathbf{A}^{-2}\mathbf{a}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ och $\mathbf{a}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara två kolonnvektorer med $n \geq 1$ element. Det gäller att $x_k = k$, $y_k = \alpha k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $x_n = n$, $y_n = \alpha n + \delta$. $0 < \alpha$ och $0 < \delta$ är givna reella tal. Vi vill anpassa dessa data till modellen $y \approx cx$. Bestäm de c-värden som som ger bästa anpassning i två- respektive max-norm. Förenkla uttrycken maximalt.
   Antag att n är stort. Hur stort inflytande får δ på c-värdet i respektiva fall; tolka resultatet. (3p)