

Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2008-03-27, V

- Skrivtid: 08.30-13.30.
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se.
Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat: Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningförslag: På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt: 12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel: Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!

Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- (a) Förklara vad partiell pivotering är och varför metoden utgör ett problem om matrisen är symmetrisk. (1p)
- (b) Givet $n \times n$ -matrisen \mathbf{A} , bevisa att $\|\mathbf{A}\|_1 \leq n \|\mathbf{A}\|_\infty$. (1p)
- (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
`sin(exp(1 / 0)), sin(exp(-1 / 0))` (1p)
- (d) Vi löser $y' = -20000y$, $y(0) = 1$ med Eulers metod och kräver att $y_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Åtminstone hur många steg måste man ta när $t \in [0, 1]$ (dvs. $t_{\text{slut}} = 1$)? (2p)
- (e) Antag att \mathbf{A} är symmetrisk och positivt definit. Bevisa att \mathbf{A} har positiva egenvärden. (2p)
- (f) Beräkna \mathbf{A} 's QR-faktorisering då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2p)$$

Var god vänd!

2. Antag att vi har en dator som endast kan beräkna $+$, $-$, $*$ men saknar division. Vi kan approximera $1/y$ (givet y) med hjälp av Newtons metod. Formulera en lämplig ekvation och sätt sedan upp Newtons metod (som givetvis inte får innehålla någon division) för ekvationen. Antag att vi startar med $x_0 = 1/y + \epsilon$ hur stort blir felet i x_1 ? Vad säger detta om konvergensordningen? (4p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och **tag** ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$.

$$\begin{cases} u' = u + 2v - 3(v')^2 - v'' \\ v''' = u - v - v'v'' + t \end{cases}, \quad \begin{cases} u(-2) = 0, \\ v(-2) = -1, v'(-2) = 2, v''(-2) = -3 \end{cases}, \quad (3p)$$

4. a) Bilda interpolationspolynomet **på Newtons form**, som interpolerar i punkterna $(-1, 1)$, $(2, 3)$ och $(4, 9)$. (1.5p)

b) Givet att interpolationspolynomet existerar, bevisa att det är entydigt bestämt. (1.5p)

5. \mathbf{A} är en osymmetrisk och ickesingulär matris av ordning n . \mathbf{a} och \mathbf{b} är kända kolonnvektorer med n element. Vi vill beräkna γ som definieras genom:

$$\gamma = \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om \mathbf{A} är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Varken matris eller vektorer behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Arrhenius formel ger ett samband mellan hastigheten, r , hos kemisk reaktion, absolut temperatur T , och aktiveringsenergi E :

$$r = \alpha e^{E/T}$$

α är den sk pre-exponentiella konstanten. Antag att vi har mätt r vid en uppsättning temperaturer T_1, T_2, \dots, T_n , så vi har alltså mätpunkter (r_k, T_k) , $k = 1, \dots, n$. Vi vill bestämma α och E .

Parametrarna ingår ickeinjärt i modellen, men genom att göra lämpliga transformationer kan vi skapa en linjär modell. Gör det och och ställ sedan upp ett **linjärt** minstakvadratproblem med vars hjälp vi kan bestämma parametrarna. Matrisen \mathbf{A} och vektorn \mathbf{b} skall redovisas! Redogör slutligen för hur vi får fram värdena på parametrarna givet lösningen på minstakvadratproblemet. Kan detta sista steg orsaka några problem? (3p)