Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2006-01-16

1. (a) Tumregeln: vi förväntar oss tappa fyra siffror ($\kappa(\mathbf{A}) = 10^4$). Vi hade sex från början och har då två kvar.

   (b) Enklare än implicita metoder (ingen ekvationslösning). Får ta korta steg om man har styva problem.

   (c) `Inf Inf`. Uttrycken beräknas från vänster till höger, så att exp(0)/0=Inf, Inf/0=Inf, Inf/0=Inf resp. exp(0)/0=Inf, Inf/1=Inf, Inf/0=Inf.

   (d) x-värdena är $10^k, k = -10, \ldots, 10$. I beräkningen av både `s1` och `s2` får man utskiftning, men i `s1` får man dessutom allvarlig kancellation, vilket man undviker i `s2`. Absoluta felet i `s1` är ungefär $5 \cdot 10^{-9}$ och i `s2` 10^{-15}.

   (e) Ritar man en figur inser man att det finns en skärning mellan $y = e^{-x}$ och $y = 2x$. Alternativt, med $f(x) = e^{-x} - 2x$ så gäller att $f(0) > 1$ och $f(1) < 0$ och eftersom f är strängt avtagande så finns precis ett nollställe till f i intervallet. Eftersom $e \approx 2.7$ så gäller även att $f(0.5) < 0$ så att $(0, 0.5)$ innehåller fixpunkten. Fixpunkten är repulsiv, ty $|f'(x^*)| = |-e^{x^*} - 1| > 1$, så vi kan inte få konvergens.

   (f) Välj ett k och tag $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ med $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. Låt $\mathbf{y}^T = [x_1, \ldots, x_k]$. Eftersom $\mathbf{y}$ är godtycklig (men ej $\mathbf{0}$) och $0 < \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}(1:k, 1:k)\mathbf{y}$ så måste delmatrisen vara positivt definit.

   (g)
$$||\mathbf{Q}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Q}\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{x}||_2}{||\mathbf{x}||_2} = 1, \quad \text{ty} \quad ||\mathbf{Q}\mathbf{x}||_2 = ||\mathbf{x}||_2$$

   Så $\kappa_2(\mathbf{Q}) = ||\mathbf{Q}||_2||\mathbf{Q}^{-1}||_2 = 1$ ty även $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ är ortogonal.

2. Låt matrisen ha elementen $a = a_{1,1}$, $b = a_{1,2}$ samt $c = a_{2,2}$. Ekvationerna blir: $2a^2 = 1$, $2ab + ac = 0, b^2 + bc + c^2 = 1/2$ (där jag dividerat den sista med två) och Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4a_k & 0 & 0 \\ 2b_k + c_k & 2a_k & a_k \\ 0 & 2b_k + c_k & b_k + 2c_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2a_k^2 - 1 \\ 2a_kb_k + a_kc_k \\ b_k^2 + b_kc_k + c_k^2 - 1/2 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = u$, $y_3 = y_2' = u'$ samt $y_4 = y_3' = u''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = ty_1y_4 + y_3 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_2 - y_3 + y_1^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = 1 \\ y_3(2) = 2 \\ y_4(2) = 4 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \\ y_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} t_0y_1^{(0)}y_4^{(0)} + y_3^{(0)} \\ y_3^{(0)} \\ y_4^{(0)} \\ y_2^{(0)} - y_3^{(0)} + (y_1^{(0)})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 - 2 + 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ 1.2 \\ 2.4 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi får följande ekvationer, när $f(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots, n$ och söker maximalt n:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 x_1 + w_2 = 1/2 \\ w_1 x_1^2 + w_2 = 1/3 \\ w_1 x_1^3 + w_2 = 1/4 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Löser man de te första ekvationerna får man $w_1 = 3/4, w_2 = 1/4, x_1 = 1/3$. (Lös t.ex. ut w_2 från den första ekvationen, stoppa in i den andra, lös ut x_1 ur denna, stoppa in i den tredje och lös ut w_1.) Dessa värden satisfierar inte den fjärde ekvationen, så maximalt gradtal är två.

b) Ja, ty det existerar ett (entydigt) bestämt polynom av grad $< n$ sådant att $p(t_k) = y_k - t_k^n$. Alltså kan vi ta $t^n + p(t)$ som vårt polynom.

5. Resultatet är en skalär. Låt oss lagra resultatet i α.

$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{b}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{b}$	n^2 +, *
$\beta = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{a}$	n^2 +, *
$\gamma = \mathbf{b}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\alpha = \beta\gamma/\alpha$	innehåller svaret

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. a) Låt $\gamma = 2/(\mathbf{u}^T\mathbf{u})$ som är en skalär. $\mathbf{H}^T = (\mathbf{I} - \gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{I}^T - \gamma(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{H}$.
Ortogonal: $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(\mathbf{I} - \gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \mathbf{I} - 2\gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T\gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{I} - 2\gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T + \gamma^2(\mathbf{u}^T\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{I}$.

b) Testa med $\mathbf{u}$ som egenvektor. $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \gamma\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u}) = -1 \cdot \mathbf{u}$. Det ortogonala komplementet till span($\mathbf{u}$) är ett $n-1$ dimensionellt underrum i vilket vi kan hitta de övriga egenvektorerna. Så tag $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$. Då gäller $\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \gamma\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$.

c) Antag att $\mathbf{x}$ är en egenvektor. Det gäller $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tag tvånormen av båda leden. $||\mathbf{Q}\mathbf{x}||_2 = ||\lambda\mathbf{x}||_2$ vilket medför, eftersom tvånormen är unitärt invariant och normen är homogen, att $||\mathbf{x}||_2 = |\lambda|\ ||\mathbf{x}||_2$. Men $||\mathbf{x}||_2 > 0$ så att $|\lambda| = 1$.