Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2007-08-21

1. (a) Se föreläsningsanteckningarna.
   (b) Se föreläsningsanteckningarna.
   (c) `sin(0)` blir exakt noll och `log(0)` blir `-Inf`. `exp(-Inf)` blir noll.
   (d) $\pi^{10}/93555 \approx 10^5/93555 \approx 1$ (exakt värde ≈ 1.000995). Vi noterar att summan blir ett redan i första iterationen. Sedan ökar summan inte speciellt mycket. `s==st` när $1/k^{10}$ skiftas ut, dvs. när $fl(s+1/k^{10}) = s$ dvs. ungefär när $fl(1+1/k^{10}) = 1$. Så k ges av sambandet $1/k^{10} \approx 10^{-16}$ så att $k \approx (10^{16})^{1/10} = 10 \cdot 10^{0.6} \approx 40$ (enligt hjälpen). När man kör programmet får man också $k = 40$.
   (e) Vi kontrollerar först att x^* är en fixpunkt. Fixpunkterna ges av $x = x + \alpha(x^4 - 2)$ så att en fixpunkt satisfierar ekvationen $x^4 = 2$. Det givna värdet är alltså en fixpunkt. attraktiv? Det skall gälla att $|g'(x^*)| < 1$ (där $x_{k+1} = g(x_k)$). $|g'(x^*)| = |1 + 4\alpha(x^*)^3| = |1 + 4\alpha 2^{3/4}|$. Löser man olikheten får man $-2^{-7/4} < \alpha < 0$.
   (f) $||\mathbf{AQ}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{AQx}||_2/||\mathbf{x}||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{AQx}||_2/||\mathbf{Qx}||_2 = \max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} ||\mathbf{Az}||_2/||\mathbf{z}||_2 = ||\mathbf{A}||_2$, där $\mathbf{z} = \mathbf{Qx}$. Vi utnyttjar att $\mathbf{z} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{Q}$ är ju ortogonal och därmed ickesingulär) och att vektortvånormen är unitärt invariant Varför? Jo, $||\mathbf{Qx}||_2^2 = (\mathbf{Qx})^T(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||_2^2$ och normen är ju ickenegativ.
   (g) Sätt $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_j\mathbf{e}_j, 1 \le j \le n$ där $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_j]^T \neq \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gäller då att
   $$0 < \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(1:j,1:j) & A(1:j,j+1:n) \\ A(j+1:n,1:j) & A(j+1:n,j+1:n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{y}^T A(1:j,1:j)\mathbf{y}$$
   vilket visar att $A(1:j,1:j)$ är positivt definit eftersom $\mathbf{y}$ kan väljas godtyckligt ($\neq \mathbf{0}$).

2. Vi inför vektorn $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(\mathbf{x})$ i stället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} f^2(\mathbf{x}^{(k)}) + \sin(x_1^{(k)}x_2^{(k)}) - 1 \\ 3f(\mathbf{x}^{(k)}) + (x_1^{(k)})^2 + x_2^{(k)} - 3 \end{bmatrix}$$
där
$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_2^{(k)}\cos(x_1^{(k)}x_2^{(k)}) & 2f(\mathbf{x}^{(k)})f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + x_1^{(k)}\cos(x_1^{(k)}x_2^{(k)}) \\ 3f_1'(\mathbf{x}^{(k)}) + 2x_1^{(k)} & 3f_2'(\mathbf{x}^{(k)}) + 1 \end{bmatrix}$$
f_1'och f_2' betecknar de partiella derivatorna. Matlabkoden blir:

```
x = randn(2, 1);    % startvektor
for k = 1:10
  fx   = f(x);
  funk = [fx^2+sin(x(1)*x(2))-1; 3*fx+x(1)^2+x(2)-3];
  g    = grad(x);
  cs   = cos(x(1)*x(2));
  J    = [2*fx*g(1)+x(2)*cs, 2*fx*g(2)+x(1)*cs
              3*g(1)+2*x(1),      3*g(2)+1];
  x    = x - J \ funk;
end
x
```

3. Inför $y_1 = r_1$, $y_2 = r_2$ samt $y_3 = v$. Systemet övergår i:
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + \sqrt{y_3 t} \cdot y_1/(|y_1| + |y_2|) \\ y_2' = y_2 + \sqrt{y_3 t} \cdot y_2/(|y_1| + |y_2|) \\ y_3' = y_1 y_2 + t y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 6 \\ y_2(2) = 4 \\ y_3(2) = 8 \end{cases}$$

Så

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ y_3^{(0)} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_1^{(0)} + \sqrt{y_3^{(0)} t_0} \cdot y_1^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_2^{(0)} + \sqrt{y_3^{(0)} t_0} \cdot y_2^{(0)}/(|y_1^{(0)}| + |y_2^{(0)}|) \\ y_1^{(0)} y_2^{(0)} + t_0 y_3^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 6 + 4 \cdot 6/(6+4) \\ 4 + 4 \cdot 4/(6+4) \\ 6 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.84 \\ 4.56 \\ 12 \end{bmatrix}$$

4. a) Vi skriver om problemet och använder partiell integration:

$$\int_0^1 \frac{(1+x)\cos x}{x^{0.9}}\, dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^{0.9}}\, dx + \int_0^1 x^{0.1} \cos x\, dx = 10 \left[x^{0.1} \cos(x)\right]_0^1 +$$

$$10 \int_0^1 x^{0.1} \sin x\, dx + \int_0^1 x^{0.1} \cos x\, dx = 10\cos(1) + \int_0^1 x^{0.1}(10 \sin x + \cos x)\, dx$$

där vi använder `quadl` på den nu mindre elaka integralen (singulariteten är borta).

b) Svar nej. q är ju en jämn funktion, men punkterna kan ju komma från en udda funktion. Säg att två av punkterna är $(-1, -1)$ samt $(1, 1)$. Det gäller då att $q(-1) = q(1)$, motsägelse!
På den andra frågan är svaret ja. Om alla $t_k > 0$ kan vi bilda de nya punkterna, (t_k^2, y_k) och hitta det "vanliga" interpolationspolynomet, p, med de nya punkterna (ty $t_k^2 < t_{k+1}^2$, vilket inte är sant i motexemplet). Tag nu koefficienterna, i p, som koefficienter i q.

5. Resultatet är en skalär.

$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	n^2 +, *, $\mathbf{t}$ allokeras
$\sigma = \mathbf{a}^T\mathbf{t}$	n +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/6$ +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	kopiera
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\sigma = \sigma + \mathbf{t}^T\mathbf{t}$	n +, *
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\sigma = \sigma + \mathbf{t}^T\mathbf{t}$	n +, *
$\eta = \mathbf{a}^T\mathbf{a}$	n +, *
$\sigma = \eta + \sigma/\eta$	1 +, 1 /

Vi behöver en extra vektor. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*.

6. $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$ är ekvivalent med $x^2 + y^2 = 2c_x x + 2c_y y + r^2 - c_x^2 - c_y^2$. Låt $z_1 = 2c_x$, $z_2 = 2c_y$ och $z_3 = r^2 - c_x^2 - c_y^2$ vara de nya parametrarna. Vi löser $\min_{\mathbf{z}} ||\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}||_2$ där högerledet ges av $b_k = x_k^2 + y_k^2$ och rad k i $\mathbf{A}$ är $[x_k, y_k, 1]$. När vi löst problemet och erhållit vektorn $\mathbf{z}$ beräknar vi c_x genom $c_x = z_1/2$, $c_y = z_2/2$ och $r = \sqrt{z_3 + c_x^2 + c_y^2}$. Om $z_3 + c_x^2 + c_y^2 < 0$ misslyckades omskrivningen.