Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2008-05-30

1. (a) Polynom av höga gradtal tenderar att svänga i ändarna av intervallet när man har ekvidistanta t-värden. Felet behöver inte gå mot noll när antalet punkter ökar.

   (b)

$$\kappa_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_1\, ||\mathbf{A}^{-1}||_1 = (1+\epsilon)2/\epsilon, \quad \text{ty} \quad 0 < \epsilon \le 1 \quad \text{och} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\epsilon \\ 0 & 1/\epsilon \end{bmatrix}$$

   (c) x antar värdena $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ varefter vi får fullständig utskiftning. Varför? Om man tittar på tabellen ser vi att vi måste undersöka $x = 32$ (då vi börjar närma oss en skillnad på 10^{16}). Vi använder tabellen och får $e^{32} \le 3^2 \cdot 1.1 \cdot 10^{13} < 10^{14}$, så ingen risk för fullständig utskiftning. När $x = 64$ får vi $e^{64} > 2^4 \cdot 1.1 \cdot 10^{26}$, som är avsevärt större än 10^{16} gånger 64. Svar: 64 skrivs ut.

   (d) `1/0=Inf`, `sin(Inf)=NaN`, `1/NaN=NaN`, `sin(NaN)=NaN`. `sin(1)/0=Inf`, `1/Inf=0`, `sin(0)=0`. Så svaret blir `NaN, 0`.

   (e)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (f) Tag $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k \neq \mathbf{0}$ (ty $j \neq k$). Då är:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = a_{j,j} - a_{j,k} - a_{k,j} + a_{k,k} = a_{j,j} - 2a_{j,k} + a_{k,k} = 0$$

   så $\mathbf{A}$ är inte positivt definit.

   (g) Använd Gram-Schmidt (eller huvudräkna fram $\mathbf{Q}$ och sedan $\mathbf{R}$):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Lös $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ som ger $\mathbf{x} = [3, -2]^T$.

2. Ekvationerna kan förenklas:

$$\begin{cases} x + y + z - 12 = 0 \\ xyz - 8 = 0 \\ 1/x + 1/y + 1/z - 3 = 0 \end{cases}$$

   så att Newtons metod lyder:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_k z_k & x_k z_k & x_k y_k \\ -1/x_k^2 & -1/y_k^2 & -1/z_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_k + y_k + z_k - 12 \\ x_k y_k z_k - 8 \\ 1/x_k + 1/y_k + 1/z_k - 3 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = y_2' = v'$ samt $y_4 = y_3' = v''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = -ty_1 + 2y_2 - 3(y_3)^2 - y_4 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 y_2 - y_3 y_4 - t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-2) = 0 \\ y_2(-2) = -1 \\ y_3(-2) = 2 \\ y_4(-2) = -3 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-2, 0), [0 -1 2 -3]');

function yp = f(t, y)
yp = [-t*y(1)+2*y(2)-3*y(3)^2-y(4); y(3); y(4); y(1)*y(2)-y(3)*y(4)-t];
```

4. a)

$$p(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt. Vi noterar att om formeln är exakt för $k = 1$ så är den exakt för alla udda k. Vi får ekvationerna:

$$\begin{cases} 2 = w_1 + w_2 + w_3, \quad k = 0 \\ 0 = -w_1 + w_3, \quad k = 1 \\ 2/3 = w_1 + w_3, \quad k = 2 \end{cases}$$

Vi kan satisfiera ekvationerna genom att välja $w_1 = w_3 = 1/3$ och $w_2 = 4/3$. När $k = 3$ blir integralen 0 vilken också metoden ger. När $k = 4$ blir integralen $2/5$ men metoden ger $2/3$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Man kan lösa det på lika olika sätt. Här är ett. Vi behöver två extra vektorer, $\mathbf{t}$ och $\mathbf{s}$ med denna lösning.

$\mathbf{t} = \mathbf{Aa}$	n^2 +, *
$\mathbf{s} = \mathbf{t} + \mathbf{At}$	n^2 +, *
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	kopiera
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$	n +
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
$\mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$	n +
bilda $\gamma = 1 + \mathbf{a}^T\mathbf{s}$	n +, *, $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = 1$

Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*. Observera att operationer som $\mathbf{t} = \mathbf{At}$ inte kan utföras utan extra minne. Dessutom skriver vi över högerleden med lösningarna. Det är därför jag har delat upp beräkningen i steg.

6. Logaritmera:

$$\log v = \log \alpha - B/T + C/T^2$$

Låt $x_1 = \log \alpha$, $x_2 = B$ och $x_3 = C$. Det linjära problemet kan då skrivas $\min_{\mathbf{x}} \ ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ där en rad i $\mathbf{A}$ har utseendet $[1, \ -1/T_k, \ 1/T_k^2]$ och motsvarande element i $\mathbf{b}$ är $\log v_k$. När vi har löst det linjära problemet sätt vi $\alpha = e^{x_1}$, $B = x_2$, och $C = x_3$ och nej, det borde inte leda till några problem.