Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2008-08-21

1. (a) Se föreläsningsanteckningarna.

   (b)

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_\infty \, ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty = 2(1+1/\epsilon), \quad \text{ty} \quad 0 < \epsilon \le 2 \quad \text{och} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\epsilon \\ 0 & 1/\epsilon \end{bmatrix}$$

   (c) $f'(1.24) \approx (f(1.24+h) - f(1.24))/h$. Ett bra värde brukar vara $\epsilon_{mach}^{1/2} \approx 10^{-8}$.

   (d) `1/0=Inf`, `cos(Inf)=NaN`, `1/NaN=NaN`, `cos(NaN)=NaN`. `cos(1)/0=Inf`, `1/Inf=0`, `cos(0)=1`. Så svaret blir `NaN, 1`.

   (e)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (f) Låt $\sigma = \pm 1$ vara tecknet på $a_{j,k}$ och tag $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j - \sigma \mathbf{e}_k \neq \mathbf{0}$ (ty $j \neq k$). Då är:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = a_{j,j} - \sigma a_{j,k} - \sigma a_{k,j} + a_{k,k} = a_{j,j} - 2\sigma a_{j,k} + a_{k,k} \le 2\max(a_{j,j}, a_{k,k}) - 2|a_{j,k}| \le 0$$

   så $\mathbf{A}$ är inte positivt definit.

   (g) Eftersom $\mathbf{A}$ har full rang kan vi använda normalekvationerna för att ta fram lösningen:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}^{-T}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

   eftersom $\mathbf{R}$ är inverterbar och $\mathbf{Q}$ är ortogonal.

2. $x_{k+1} = x_k - (x_k \sin x_k - 1)/(\sin x_k + x_k \cos x_k)$. Skriv problemet som $\sin x = 1/x$. Rötterna är de x för vilka kurvorna $\sin x$ och $1/x$ skär varandra (oändligt många positiva rötter). $1/x > \sin x$ då $x = 1$ och $1/x < \sin x$ för $x = \pi/2$. Pga kontinuiteten existerar minst en rot i intervallet (exakt en eftersom $1/x$ och $\sin x$ är strängt monotona i intervallet).

3. Inför $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = y_2' = v'$ samt $y_4 = y_3' = v''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = -ty_1 + 5y_2 - 3(y_3)^2 - y_4 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 + y_2 - y_3 y_4 - t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-3) = 0 \\ y_2(-3) = -1 \\ y_3(-3) = 2 \\ y_4(-3) = -3 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-3, 0), [0 -1 2 -3]');

function yp = f(t, y)
yp = [-t*y(1)+5*y(2)-3*y(3)^2-y(4); y(3); y(4); y(1)+y(2)-y(3)*y(4)-t];
```

4. a) Vi gör ansatsen: $p(t) = x_1 + x_2(t-1) + x_3(t-1)(t-2)$. Interpolationsvillkoren ger ekvationerna: $1 = x_1$, $3 = x_1 + x_2 \cdot 1$, $9 = x_1 + x_2 \cdot 3 + x_3 \cdot 3 \cdot 2$. Alltså $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 1/3$ varför polynomet blir: $p(t) = 1 + 2(t-1) + (t-1)(t-2)/3$.

   b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt. Vi noterar att om formeln är exakt för $k = 1$ så är den exakt för alla udda k. Vi får ekvationerna:

$$\begin{cases} 2 = w(1+1+1), & k = 0 \\ 0 = w(-a+b+a), & k = 1 \\ 2/3 = w(a^2+b^2+a^2), & k = 2 \end{cases}$$

   Ekvationerna satisfieras av $w = 2/3$, $a = 1/\sqrt{2}$ och $b = 0$. När $k = 3$ blir integralen 0 vilken också metoden ger. När $k = 4$ blir integralen $2/5$ men metoden ger $1/6$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Resultatet är en skalär, kalla den γ. Vi skriver om uttrycket:

$$\gamma = \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-T} \left(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \left[(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{I})\mathbf{A}^T\right]^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \left[(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{I})\mathbf{A}\right]^{-1} \mathbf{a} =$$

$$\mathbf{a}^T \left(\mathbf{I} + 2\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{a}$$

   Vi behöver en extra vektor, $\mathbf{t}$.

$a_{kk} = a_{kk} + 1/2,\ k = 1, \ldots, n$	n +
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/6$ +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{a}$	kopiera
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *, skriv över $\mathbf{t}$
bilda $\gamma = (1/2)(\mathbf{a}^T\mathbf{t})$	n +, *

   Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*. Observera att operationer som $\mathbf{t} = \mathbf{At}$ inte kan utföras utan extra minne. Dessutom skriver vi över högerleden med lösningarna. Det är därför jag har delat upp beräkningen i steg.

6. Logaritmera och multiplicera upp nämnaren:
   $\log R = (p_1 + p_2T)/(1 + p_3T)$, $(1 + p_3T)\log R = (p_1 + p_2T)$. Samla alla parametrarna på en sida: $p_1 + p_2T - p_3T\log R = \log R$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[1, T_k, -T_k \log R_k], k = 1, \ldots, m$. $\mathbf{b}$-vektorn består av $\log R_k$-värdena och $\mathbf{x}$-vektorn innehåller de tre parametrarna, $\mathbf{x}^T = [p_1, p_2, p_3]$.