Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2009-01-15

1. (a) Se föreläsningsanteckningarna.

   (b) Utnyttja att normen är submultiplikativ:

$$\kappa(\mathbf{AB}) = ||\mathbf{AB}||\, ||(\mathbf{AB})^{-1}|| = ||\mathbf{AB}||\, ||\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}|| \le ||\mathbf{A}||\, ||\mathbf{B}||\, ||\mathbf{B}^{-1}||\, ||\mathbf{A}^{-1}|| = \kappa(\mathbf{A})\kappa(\mathbf{B})$$

   (c) $f'(1.24 \cdot 10^{10}) \approx (f(1.24 \cdot 10^{10} + h) - f(1.24 \cdot 10^{10}))/h$. Ett bra värde borde rimligen vara $\epsilon_{mach}^{1/2} \cdot 10^{10} \approx 10^2$.

   (d) `log(0)=-Inf`, `1/(-Inf)=0`, `exp(0)=1`.
   `1/0=Inf`, `log(Inf)=Inf`, `1/Inf=0`, `log(0)=-Inf`. Så svaret blir `1, -Inf`.

   (e) Normalekvationerna, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

   (f) Symmetri: $(\mathbf{LDL}^T)^T = (\mathbf{L}^T)^T\mathbf{D}^T\mathbf{L}^T = \mathbf{LDL}^T$ (samma). $\mathbf{L}$ är ickesingulär, ty ettor på diagonalen ($\det(\mathbf{L}) = 1$ t.ex). Tag godtycklig vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, då är även $\mathbf{z} = \mathbf{L}^T\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (eftersom $\mathbf{L}$ är ickesingulär).

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{LDL}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{L}^T\mathbf{x})^T\mathbf{D}(\mathbf{L}^T\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T\mathbf{D}\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n} d_k z_k^2 > 0$$

   ty $d_k > 0$ och åtminstone något $z_k \neq 0$, så matrisen är positivt definit.

   (g) Newtons metod för problemet:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) \Leftrightarrow x_{k+1} = g(x_k), \text{ med } g(x) = x - f(x)/f'(x)$$

   Från fixpunktsteorin vet vi att vi får konvergens om vi startar tillräckligt nära α och $|g'(\alpha)| < 1$.

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(\alpha) = 1 - \frac{(f'(\alpha))^2 - 0}{(f'(\alpha))^2} = 0$$

2. Vektorn måste tydligen ha två element (annars är inte $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ definierade). Låt $\mathbf{x} = [a, b]^T$ (för att slippa en del index, naturligare vore x_1 och x_2). $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1.4$ blir, efter lite räknande, $4a^2 + 4ab + 5b^2 = 1.4$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0.2$ blir $a^2 - 2ab + 3b^2 = 0.2$. Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8a_k + 4b_k & 4a_k + 10b_k \\ 2a_k - 2b_k & -2a_k + 6b_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4a_k^2 + 4a_kb_k + 5b_k^2 - 1.4 \\ a_k^2 - 2a_kb_k + 3b_k^2 - 0.2 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$ samt $y_4 = z' = y_3'$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t + (y_1 + y_3)y_2 + y_4 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1y_3/(y_2 + t) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = -3 \\ y_3(2) = 1 \\ y_4(2) = 2 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(2, 3), [3 -3 1 2]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t+(y(1)+y(3))*y(2)+y(4); y(4); y(1)*y(3)/(y(2)+t)];
```

4. a) Vi Taylorutvecklar (låt $f = f(0)$, $f' = f'(0)$, $f'' = f''(0)$ etc):

$$af(0)+bf(h)+cf(2h) = af+b\left[f+hf'+\frac{h^2}{2}f''+\frac{h^3}{6}f'''+\cdots\right]+c\left[f+2hf'+\frac{4h^2}{2}f''+\frac{8h^3}{6}f'''+\cdots\right] =$$

$$(a+b+c)f+(b+2c)hf'+(b/2+2c)h^2f''+(b/6+4c/3)h^3f'''+\cdots$$

Om vi tar $a=-3/(2h), b=2/h, c=-1/(2h)$ så blir

$$af(0)+bf(h)+cf(2h) = f' - (h^3/3)f''' + \cdots$$

vilket är det bästa vi kan få.

b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k=0,1,\ldots,m$ där m är så stort som möjligt. Vi noterar att om formeln är exakt för $k=1$ så är den exakt för alla udda k. Vi får ekvationerna:

$$\begin{cases} 2 = w_1+w_2+w_3, & k=0 \\ 0 = -w_1/2+w_3/2, & k=1 \\ 2/3 = w_1/4+w_3/4, & k=2 \end{cases}$$

Ekvationerna satisfieras av $w_1 = w_3 = 4/3$, $w_2 = -2/3$, $a = 1/\sqrt{2}$ och $b = 0$. När $k = 3$ blir integralen 0 vilken också metoden ger. När $k = 4$ blir integralen $2/5$ men metoden ger $1/6$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Algoritmen kan formuleras som följer:

beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUx} = \mathbf{x}$	n^2 +, * (skriv över $\mathbf{x}$)
bilda $\tau = \mathbf{b}^T\mathbf{x}$	n +, *
bilda $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tau\mathbf{a}$	n +, *
lös $\mathbf{LUy} = \mathbf{x}$	n^2 +, * (samma faktorisering)

Vi behöver inget extra minne och vi kan lagra $\mathbf{y}$ på $\mathbf{x}$ plats. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Exponentiera

$$e^b = \left[t+\frac{p_1+p_2t^2}{p_3}\right]e^{-p_1} \Rightarrow -e^{p_1}e^b + \frac{p_1+p_2t^2}{p_3} = -t$$

Inför $x_1 = e^{p_1}$, $x_2 = p_1/p_3$ och $x_3 = p_2/p_3$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[-e^{b_k}, 1, t_k^2], k=1,\ldots,m$ och $b_k = -t_k$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||_2$ sätter vi $p_1 = \log x_1$ ($x_1 > 0$ nödvändigt), varefter $p_3 = p_1/x_2$ ($x_2 \neq 0$ nödvändigt), slutligen sätts $p_2 = p_3x_3$.