Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2005-03-29, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-mail: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, Eklandag. 86. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum. Tentamina kan hämtas i mottagningsrummet 12.30-13.00 varje vardag och resultat kan fås på telefon 772 5388.
Lösningsförslag:	På www.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Vad kännetecknar ett styvt ODE-problem och varför krävs speciella metoder för att lösa det? (1p)

(b) $x_{k+1} = g(x_k)$ är en fixpunktsiteration. Definiera begreppet fixpunkt, och ange villkor för att vi skall få konvergens mot fixpunkten. (1p)

(c) Vad är LAPACK och vad kan det användas till (svara inte för vagt)? (1p)

(d) Ange en väsentlig fördel och en väsentlig nackdel med Gausskvadratur. (1p)

(e) Vilka värden kommer Matlab att skriva ut när vi kör följande?
`sin(atan(1/0)), log(1 / 1e200^2)` (1p)

(f) Vilken utskrift ger följande Matlabprogram (gör en uppskattning)? Ledning: $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-4} = \pi^4/90$.
`s1=0; s2=-1; k=0; while s1>s2; k=k+10; s2=s1; s1=s1+1/k^4; end; k` (1p)

(g) $\mathbf{A}$ är en symmetrisk och positivt definit matris. Bevisa att $\mathbf{A}$ har positiva egenvärden, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Bevisa att $\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}$ inte kan vara positivt definit om $\mu \geq \lambda_k$ för något k. (2p)

(h) $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ är en kvadratisk, ickesingulär diagonalmatris. Visa att

$$\kappa_1(\mathbf{D}) = \kappa_2(\mathbf{D}) = \kappa_\infty(\mathbf{D}) = \max_k |d_k| / \min_k |d_k|$$

$\kappa_1(\mathbf{D})$ är konditionstalet i ettnorm, $\kappa_2(\mathbf{D})$ i tvånorm och $\kappa_\infty(\mathbf{D})$ i maxnorm. (2p)

2. Vi vill bestämma en 2×2-matris $\mathbf{X}$ som är **övertriangulär** och som satisfierar matrisekvationen:

$$\mathbf{X}^3 + 2\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inför lämpliga beteckningar för de obekanta elementen i matrisen, ställ upp ett system av ekvationer för de obekanta. Formulera sedan Newtons metod för ekvationssystemet. (3p)

3. Formulera Eulers metod för problemet nedan och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (u och v är skalära funktioner av tiden t.)

$$\begin{cases} u'' = uv/\sqrt{u' + v'} \\ v'' = t + (v + u)u' \end{cases}, \quad \begin{cases} u(t_0) = -1, u'(t_0) = 3 \\ v(t_0) = 2, v'(t_0) = 1 \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad (3\text{p})$$

4. a) Bestäm den interpolerande splinefunktionen, s, av **grad ett** (dvs. kontinuitet), på intervallet $[0, 2]$ som går genom punkterna $(0, 0), (1, \xi), (2, 4)$. ξ är en skalär. För vilket/vilka värden på ξ blir s deriverbar i intervallet? (1.5p)

b) p är ett interpolationspolynom, som interpolerar funktionen f för t_k-punkterna $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \geq 2$. Antag att $f(t) > 0$ för alla t. Är det alltid sant att $p(t) > 0, t \in [t_1, t_n]$? Ge bevis (om det är sant) eller motexempel (om det är falskt). (1.5p)

5. Givet den symmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ med n element vill vi beräkna ξ definierad enligt:

$$\xi = \mathbf{a}^T \left(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + 2\mathbf{A} - \mathbf{A}^{-1} \right) \mathbf{b}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. $\mathbf{Q} \in \Re^{m \times n}$ och $\mathbf{P} \in \Re^{m \times r}$ är givna, med $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ samt $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Dessutom gäller att $\mathbf{S}^T\mathbf{S} = \mathbf{I}$ där $\mathbf{S} = [\mathbf{Q}, \mathbf{P}] \in \Re^{m \times (n+r)}$ ($\mathbf{S}$ bildas alltså genom att $\mathbf{P}$ läggs till höger om $\mathbf{Q}$). $\mathbf{c} \in \Re^r$ och $\mathbf{g} \in \Re^m$ är givna vektorer. $\mathbf{g}$ har egenskapen att $\mathbf{Q}^T\mathbf{g} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{P}^T\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Beräkna $\mathbf{x}$ som löser problemet nedan ($\mathbf{q}_1$ är första kolonnen i $\mathbf{Q}$). Är lösningen entydigt bestämd? Vad är normen av residualvektorn? Var noga med detaljerna!

$$\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{c} + \mathbf{q}_1 - \mathbf{g}||_2$$

(3p)