Tentamen: Numerisk Analys, MAN200, MAM240, GU, 2007-08-21, V-huset.

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 09.30 och 12.30.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Beskriv hur partiell pivotering fungerar och varför det används. (1p)

   (b) Använd kvadraturteknik för att härleda Eulers metod (för ODE-problem). (1p)

   (c) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
   `log(sin(0)), exp(log(sin(0)))` (1p)

   (d) Ungefär vad torde följande Matlabprogram ge för utskrift? Ledning: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{10} = \pi^{10}/93555$.
   `s=0; for k=1:100000, st=s; s=s+1/k^10; if s == st, break, end, end, k`
   Räknehjälp: $10^{0.4} \approx 2.5$, $10^{0.6} \approx 4.0$, $10^{0.8} \approx 6.3$. (1p)

   (e) Vi vill beräkna $x^* = 2^{1/4}$. Betrakta fixpunktsiterationen, $x_{k+1} = x_k + \alpha(x_k^4 - 2)$, där α är reelt tal. För vilka α är x^* en attraktiv fixpunkt? (2p)

   (f) $\mathbf{A}$ är en $m \times n$-matris och $\mathbf{Q}$ är en kvadratisk ortogonal matris av ordning n. Bevisa att
   $$||\mathbf{AQ}||_2 = ||\mathbf{A}||_2 \quad (2p)$$

   (g) $\mathbf{A}$ är en symmetrisk och positivt definit matris av ordning n. Visa att varje delmatris (med Matlab-notation), $\mathbf{A}(1:j, 1:j)$, $j = 1, \ldots, n$, också är positivt definit. (2p)

Var god vänd!

2. Vi vill lösa följande system med hjälp av Newtons metod, där f är en reellvärd funktion av de reella variablerna x_1 och x_2.
$$\begin{cases} (f(x_1,x_2))^2 + \sin(x_1x_2) = 1 \\ 3f(x_1,x_2) + x_1^2 + x_2 = 3 \end{cases}$$
a) Formulera Newtons metod för problemet (för en allmän funktion f).
b) Använd resultatet i a) för att skriva ett enkelt Matlabprogram för att lösa problemet. En enkel Newton-loop som kör tio iterationer är tillräckligt. Du kan utnyttja Matlabfunktionerna `f` och `grad`.
`f(x)` returnerar funktionsvärdet, $f(x_1, x_2)$, givet att `x` är en 2×1-matrix som innehåller x_1 och x_2. Analogt returnerar `grad(x)` gradienten av f (som en 2×1-matris). Endast den sista approximationen av lösningen behöver skrivas ut. (3p)

3. a) Skriv om problemet nedan som ett system av första ordningens ekvationer, där alla ingående funktioner är reellvärda.
b) Formulera sedan Eulers metod för problemet och tag ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$.

$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, är en **vektorvärd** funktion av tiden t och $v(t)$ är en reellvärd funktion.
$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{r}\ \sqrt{v\cdot t})/||\mathbf{r}||_1 \\ v' = r_1r_2 + t\cdot v \end{cases}, \quad r_1(2)=6,\ r_2(2)=4,\ v(2)=8 \qquad (3\text{p})$$

4. a) Följande Matlab-kommando ger en dålig approximation av integralen:

```
quadl('(1 + x) .* cos(x) ./ x.^0.9', 0, 1)
```

Skriv om uttrycket på lämpligt sätt så att man kan använda `quadl` för att beräkna en bra approximation av integralen. (1.5p)

b) Vi söker ett polynom, q, som innehåller endast jämna potenser av t, dvs. q har formen:
$$q(t) = c_0 + c_2t^2 + c_4t^4 + \cdots + c_{2m}t^{2m}$$
Existerar det alltid ett entydigt bestämt polynom q, av grad högst $2(n-1)$ som satisfierar
$$q(t_k) = y_k,\ t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\quad k = 1,\ldots,n\ \ ?$$
Ge bevis eller motexempel. Vad gäller om $0 < t_k,\ k = 1,\ldots,n$? (1.5p)

5. Givet den symmetriska och ickesingulära matrisen $\mathbf{A}$ av ordning n, kolonnvektorn $\mathbf{a}$ med n element, vill vi beräkna följande kvantitet:
$$\frac{\mathbf{a}^T(\mathbf{A}^{-2} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-4})\ \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$
Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer och hur mycket extra minne krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ och $\mathbf{a}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Ekvationen för en cirkel i xy-planet, med centrum i (c_x, c_y), är $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$. Vi har en uppsättning mätpunkter (x_k, y_k), $k = 1,\ldots,n$ och vi vill bestämma värdet på c_x, c_y och r genom att anpassa cirkeln till mätpunkterna. Parametrarna ingår ickelinjärt i modellen, men genom att göra lämpliga substitutioner kan vi skapa en linjär modell. Gör det och och ställ sedan upp ett **linjärt** minstakvadratproblem med vars hjälp vi kan bestämma parametrarna. Matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ skall redovisas! Redogör slutligen för hur vi får fram värdena på parametrarna givet lösningen på minstakvadratproblemet. Kan detta sista steg orsaka några problem? (3p)