Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2009-01-15, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Definiera begreppet stabil algoritm. (1p)

(b) $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två kvadratiska och ickesingulära matriser. Bevisa att

$$\kappa(\mathbf{AB}) \leq \kappa(\mathbf{A})\,\kappa(\mathbf{B})$$

där κ är definierad i någon av våra vanliga matrisnormer. (1p)

(c) Vi vill approximera $f'(1.24 \cdot 10^{10})$, i Matlab, genom att använda en ensidig differensapproximation. Skriv upp formeln för approximationen och ange ett lämpligt värde på h. (1p)

(d) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `exp(1/log(0))`, `log(1/log(1/0))` (1p)

(e) Lös följande minstakvadratproblem:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_2, \quad (2p)$$

(f) Antag att $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$ där $\mathbf{L}$ är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris med positiva diagonalelement. Visa att $\mathbf{A}$ är symmetrisk och positivt definit. (2p)

(g) Vi vill lösa $f(x) = 0$ med Newtons metod, där f är två gånger kontinuerligt deriverbar. Låt α var ett nollställe sådant att $f'(\alpha) \neq 0$. Använd fixpunktsteori för att bevisa att vi får konvergens mot α om startvärdet $x_0 \neq \alpha$ ligger tillräckligt när α. (2p)

Var god vänd!

2. Vi söker en kolonnvektor, $\mathbf{x}$, som satisfierar villkoren:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1.4 \text{ och } \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0.2, \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 100 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [2, 3]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} v'' = t + (v+z)v' + z' \\ z'' = zv/(v'+t) \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3, \ v'(2) = -3 \\ z(2) = 1, \ z'(2) = 2 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

4. a) Beräkna a, b och c så att $af(0) + bf(h) + cf(2h)$ är en så bra approximation av $f'(0)$ som möjligt (bra var gäller approximationsordning med avseende på h). (1.5p)

   b) Välj w_1, w_2, w_3 i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_1 f(-1/2) + w_2 f(0) + w_3 f(1/2)$$

5. $\mathbf{A}$ är en osymmetrisk och ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är kolonnvektorer med n element. Vi vill beräkna

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{b}^T)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Ingen av $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ eller $\mathbf{b}$ behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där b beror av t på följande sätt:

$$b \approx \log\left(t + \frac{p_1 + p_2\, t^2}{p_3}\right) - p_1$$

   där p_1, p_2 och p_3 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden $(t_1, b_1), (t_2, b_2), \ldots, (t_m, b_m)$ där alla $b_k > 0$.
   Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem.
   Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p_1, p_2 och p_3 från $\mathbf{x}$. Kan detta orsaka några problem? (3p)