

Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2008-08-21, V

Skrivtid: 08.30-13.30.
Ansvarig: Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt: Aron Lagerberg, tel 076 272 18 61.
Resultat: Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningförslag: Måndag på www (besöker KTH).
Gräns för godkänt: 12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel: Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!

Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- (a) Beskriv idén bakom Chebyshevpunkterna. (1p)
(b) Beräkna $\kappa_{\infty}(\mathbf{A})$, som funktion av ϵ , då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad 0 < \epsilon \leq 2 \quad (1p)$$

- (c) Vi vill approximera $f'(1.24)$, i Matlab, genom att använda en ensidig differensapproximation. Skriv upp formeln för approximationen och ange ett lämpligt värde på h . (1p)
(d) Vilken utskrift ger Matlab av följande? $\cos(1/\cos(1/0))$, $\cos(1/(\cos(1)/0))$ (1p)
(e) Beräkna \mathbf{A} 's Cholesky-faktorisering då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad (2p)$$

- (f) \mathbf{A} är en symmetrisk matris. Det existerar två positiva heltal j och k , $j \neq k$, så att $|a_{j,k}| \geq \max(a_{j,j}, a_{k,k}) > 0$. Bevisa att \mathbf{A} **inte** är positivt definit. (2p)
(g) Givet \mathbf{A} 's QR-faktoriseringen, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, beräkna lösningen till $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$. Du kan anta att \mathbf{A} har full rang. (1p)

Var god vänd!

2. En sommar hjälpte jag till med att konstruera en "wind chime" och fick då anledning att beräkna grund- och övertoner för en metallstav (inspänd på olika ställen) och löste då ekvationen, $x \sin x = 1$. Formulera Newtons metod för ekvationen. Hur många positiva rötter har ekvationen? Motivering krävs. Visa att det finns (åtminstone) en rot i intervallet $(1, \pi/2)$. (4p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 100 ekvidistanta t -värden i intervallet $t \in [-3, 0]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} u' = -tu + 5v - 3(v')^2 - v'' \\ v''' = u + v - v'v'' - t \end{cases}, \quad \begin{cases} u(-3) = 0, \\ v(-3) = -1, v'(-3) = 2, v''(-3) = -3 \end{cases}, \quad (3p)$$

4. a) Bilda interpolationspolynomet **på Newtons form**, som interpolerar i punkterna $(1, 1)$, $(2, 3)$ och $(4, 9)$. (1.5p)

b) Välj w, a, b i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w(f(-a) + f(b) + f(a))$$

5. **A** är en symmetrisk och ickesingulär matris av ordning n . **a** är en känd kolonnvektor med n element. Vi vill beräkna följande kvantitet:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om **A** är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Varken **A** eller **a** behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en termistor, dvs. ett motstånd vars resistans, R , beror av temperaturen, T . Vi har följande modell för sambandet mellan R och T :

$$R \approx e^{(p_1 + p_2 T)/(1 + p_3 T)}$$

Vi vill bestämma parametrarna p_1, p_2 och p_3 givet mätvärden $(T_1, R_1), (T_2, R_2), \dots, (T_m, R_m)$. Gör en lämplig transformation och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem. Matrisen **A** samt vektorerna **b** och **x** skall redovisas! (3p)