Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2009-05-29

1. (a) Låt talen vara x och y. $fl(xy) = xy(1+\epsilon) = \tilde{x}\tilde{y}$, $|\epsilon| \le \epsilon_{mach}$ där t.ex. $\tilde{x} = x(1+\epsilon)$ och $\tilde{y} = y$ så att den beräkna produkten är en exakt produkt av tal som ligger nära x och y.

   (b) `1/0=Inf`, `2/0=Inf`, `Inf-Inf=NaN`, `exp(NaN)=NaN`.
   `-1/0=-Inf`, `atan(-Inf)`$\approx -\pi/2$, så att `sin` borde bli `-1`. Så svaret blir `NaN, -1`.

   (c) Det kan bero på att vi använder en explicit lösare och att problemet är styvt. Det skulle också kunna bero på att vi ligger nära en singularitet. Om vi använder en lösare av låg ordning och lösningen oscillerar får vi också ta korta steg. Detta var tre möjliga orsaker.

   (d) Choleskyfaktoriseringen (om den existerar) blir

   $$\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 2/\sqrt{\alpha} & \sqrt{\alpha-1-4/\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} & 2/\sqrt{\alpha} \\ 0 & \sqrt{\alpha-1-4/\alpha} \end{bmatrix}$$

   För existens kräver vi tydligen att $\alpha > 0$ och $\alpha - 1 - 4/\alpha > 0$ eller $\alpha^2 - \alpha - 4 > 0$. Löser man andragradsekvationen (för likhet) får man slutligen villkoret $\alpha > (1+\sqrt{17})/2$.

   (e) Vi använder normalekvationerna, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ och noterar den speciella formen hos $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

   $$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^T[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T\mathbf{a} & \mathbf{a}^T\mathbf{b} & \mathbf{a}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{a} & \mathbf{b}^T\mathbf{b} & \mathbf{b}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{a} & \mathbf{c}^T\mathbf{b} & \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T\mathbf{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^T\mathbf{b} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

   som man kan räkna ut om man vill, t.ex. är $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||_2^2 = 25$. Det räcker dock att veta att diagonalen inte innehåller några nollor (så att $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ är inverterbar). Detta pga att högerledet också innehåller $\mathbf{a}^T\mathbf{a}$ etc. $\mathbf{A}^T$ multiplicerat med högerledet blir:

   $$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\ \mathbf{b}^T(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \\ \mathbf{c}^T(2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}^T\mathbf{a} \\ -3\mathbf{b}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}^T\mathbf{a} \\ -3\mathbf{b}^T\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

   Normalekvationerna har alltså lösningen $\mathbf{x}^T = [2,-3,1]$.
   Alternativt kan man gå via QR-faktoriseringen (om man läst det avsnittet). I detta fall blir den

   $$\mathbf{A} = \underbrace{[\mathbf{a}/||\mathbf{a}||_2, \mathbf{b}/||\mathbf{b}||_2, \mathbf{c}/||\mathbf{c}||_2]}_{\mathbf{Q}} \ \underbrace{\mathrm{diag}(||\mathbf{a}||_2, ||\mathbf{b}||_2, ||\mathbf{c}||_2)}_{\mathbf{R}}$$

   pga ortogonaliteten hos $\mathbf{A}$:s kolonner. Slutligen är $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$.

   (f) Eftersom en norm är ickenegativ gäller att:

   $$||\mathbf{Q}\mathbf{x}||_2 = \sqrt{(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T\mathbf{Q}\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{||\mathbf{x}||_2^2} = ||\mathbf{x}||_2$$

   (g) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x(2-10x)$ vilket ger $x = 0$ eller $x = 0.1$. $g'(0) = 2$ så punkten är repulsiv och vi kan inte få konvergens. $g'(0.1) = 0$ så vi kan få konvergens.

2. Vektorn måste tydligen ha två element (annars är inte $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$ definierade). Låt $\mathbf{x} = [a,\ b]^T$ (för att slippa en del index, naturligare vore x_1 och x_2). $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1 \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ (men $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är ingen lösning) blir, efter lite räknande, $3a^2 + 6ab + 2b^2 = 0$. Normeringsvillkoret, $||\mathbf{x}||_2 = 1$, kan skrivas $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Newtons metod kan skrivas:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6a_k + 6b_k & 6a_k + 4b_k \\ 2a_k & 2b_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3a_k^2 + 6a_kb_k + 2b_k^2 \\ a_k^2 + b_k^2 - 1 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$, $y_4 = z' = y_3'$, $y_5 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t^2 + (y_1 + y_3)y_2 + y_4 + y_5^2 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_3 - y_1/(y_2 + t) - y_5 \\ y_5' = y_5 - y_3 - 2y_1y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = 3 \\ y_2(2) = -3 \\ y_3(2) = 1 \\ y_4(2) = 2 \\ y_5(2) = 4 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(2, 3), [3 -3 1 2 4]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t^2+(y(1)+y(3))*y(2)+y(4)+y(5)^2; y(4); ...
      y(3)-y(1)/(y(2)+t)-y(5); y(5)-y(3)-2*y(1)*y(4)];
```

4. a) Polynomet blir $p(t) = -t^2/2 + 7t/2 - 1$, så att $p(3) = 5$.

   b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt. Vi noterar att formeln är exakt för alla udda k. Övriga ekvationer (jämna k), blir:

$$\begin{aligned} 2 &= 2w_1 + w_2, \quad k = 0 \\ 2/3 &= 2w_1\xi^2, \quad k = 2 \\ 2/5 &= 2w_1\xi^4, \quad k = 4 \\ 2/7 &= 2w_1\xi^6, \quad k = 6, \text{ klarar vi knappast} \end{aligned}$$

   Dividera ekvationerna för $k = 4$ och $k = 2$, ger $\xi^2 = 3/5$ så att $\xi = \sqrt{3/5}$, vilket ($k = 2$) ger $w_1 = 5/9$ och sedan $w_2 = 8/9$. När $k = 6$ blir integralen $2/7$ men metoden ger $6/25$. Så det polynomiella gradtalet är fem.

5. Skriv om problemet:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 1)\mathbf{x} + 2(\mathbf{A}\mathbf{x}) - 3(\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x})) - 4(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})) - 4\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

bilda $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	n^2 +, *
bilda $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{t}$	n^2 +, *
bilda $\eta = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$	n +, *
bilda $\eta = \eta - 1$	1 +
bilda $\mathbf{y} = \eta\mathbf{x} + 2\mathbf{t} - 3\mathbf{y}$	$3n$ *, $2n$ +
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUx} = \mathbf{x}$	n^2 +, * (skriv över $\mathbf{x}$)
bilda $\mathbf{y} = \mathbf{y} - 4\mathbf{x}$	n *, +
lös $\mathbf{LUx} = \mathbf{x}$	n^2 +, * (samma faktorisering)
bilda $\mathbf{y} = \mathbf{y} - 4\mathbf{x}$	n *, +

   Vi behöver en extra vektor $\mathbf{t}$. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Flytta över $2p_2$ och kvadrera:

$$(c + 2p_2)^2 = t + p_1 \Leftrightarrow c^2 + 4cp_2 + 4p_2^2 = t + p_1 \Leftrightarrow \underbrace{4p_2^2 - p_1}_{x_1} + 4c\underbrace{p_2}_{x_2} = \underbrace{t - c^2}_{b}$$

   Inför $x_1 = 4p_2^2 - p_1$ och $x_2 = p_2$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[1, 4c_k], k = 1, \ldots, m$ och $b_k = t_k - c_k^2$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $p_2 = x_2$, varefter $p_1 = 4p_2^2 - x_1$. Detta leder inte till några problem, däremot är det ett allvarligt problem om $t_k + p_1 < 0$ för något k.