Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2010-05-26

1. (a)

$$\kappa_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_1\ ||\mathbf{A}^{-1}||_1 = \left|\left|\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right|\right|_1 \left|\left|\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\right|\right|_1 = 22 \cdot 10.5 = 231$$

(b) `1.2e10/0 = Inf`, `exp(Inf)=Inf`, `log(Inf)=Inf`, så svaret är `Inf`.
`sin(0)/0=0/0=NaN`, `0/sin(0)=0/0=NaN`, `NaN-NaN=NaN`, `asin(NaN)=NaN`. Så svaret blir `Inf, NaN`.

(c) Faktoriseringen blir (först $\mathbf{LU}$ sedan $\mathbf{LDL}^T$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Normalekvationerna $\mathbf{e}^T\mathbf{e}\ \xi = \mathbf{e}^T\mathbf{b}$, men $\mathbf{e}^T\mathbf{e} = 8$ och $\mathbf{e}^T\mathbf{b} = 3.2$ så att $\xi = 3.2/8 = 0.4$.

(e) Vi kontrollerar de tre villkoren.

i. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) > 0$ medför att $c_1, c_2 > 0$ är nödvändigt, ty tag $\mathbf{x} = [1, 0]^T$ respektive $\mathbf{x} = [0, 1]^T$. Med detta val av c_1, c_2 blir de resterande villkoren satisfierade, ty:

ii. $f(\alpha\mathbf{x}) = c_1|\alpha\ x_1| + c_2|\alpha\ x_2| = |\alpha|(c_1|x_1| + c_2|x_2|) = f(\mathbf{x})$.

iii. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c_1|x_1 + y_1| + c_2|x_2 + y_2| \leq c_1(|x_1| + |y_1|) + c_2(|x_2| + |y_2|) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Svaret är således att c_1 och c_2 måste vara positiva.

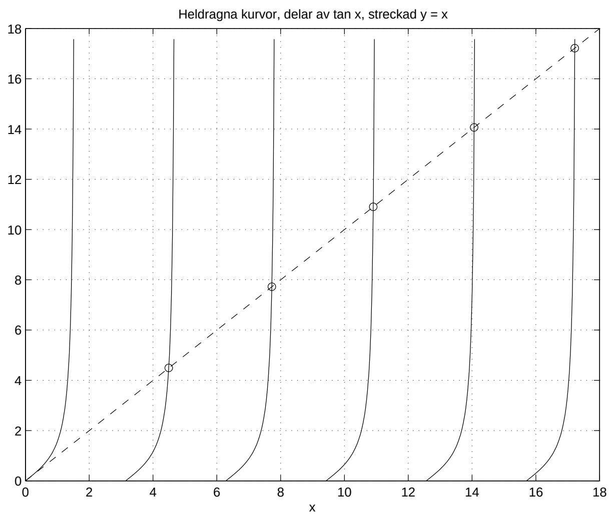
(f) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x + \cos(x - 1)$ vilket ger $\cos(x - 1) = 0$ så fixpunkterna är $1+\pi/2+k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nu till konvergensen: $|g'(x)| = |1-\sin(x-1)|$ så att $|g'(1+\pi/2+k\pi)| = |1 - \sin(\pi/2 + k\pi)|$. Vi får attraktiva fixpunkter när $|g'(x)| < 1$, dvs. när sinusvärdet är ett, så när $x = 1 + \pi/2 + k\pi, k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$.

(g) $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ är positivt definit då $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0$. Vi måste kunna begränsa $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ och använder Cauchy-Schwarz olikhet och tvånormens egenskaper:

$$|\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}| \leq ||\mathbf{x}||_2||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_2||\mathbf{A}||_2||\mathbf{x}||_2 = ||\mathbf{A}||_2||\mathbf{x}||_2^2$$

Alltså: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}^T\mathbf{x} \geq -||\mathbf{A}||_2||\mathbf{x}||_2^2 + \alpha||\mathbf{x}||_2^2$ så att $\alpha_0 = ||\mathbf{A}||_2$ duger. (Man kan bevisa att det minsta värdet på α_0 är absolutbeloppet av $\mathbf{A}$:s mest negativa egenvärde.)

2. Här en bild som visar skärningar mellan $y = \tan x$ och $y = x$. Eftersom $\tan x$ är periodisk (med perioden π) kommer vi att få oändligt många skärningar (ringarna). Eftersom (Taylorutvecklingen) $\tan x > x$ nära noll så har vi ingen skärning i närheten av origo.



Nu till startapproximationerna. $\tan x$ har lodrät asymptot för $x = \pi/2 + k\pi, k = 1, 2, \ldots$ (vi är inte intresserade av $k = 0$), så att bra startapproximationer är värden som liger lite till vänster om asymptotvärdena. $x = \pi/2 + k\pi - 10^{-3}, k = 1, 2, \ldots, 100$ borde fungera bra.

Om man tycker att 10^{-3} känns lite godtyckligt kan man enkelt skaffa sig en bättre startapproximationer, t.ex. så här (krävs inte för att få full poäng på uppgiften). Ansätt startvärdet $\pi/2 + k\pi - \epsilon$ (vi söker ϵ). Eftersom $1/\tan(\pi/2 + k\pi - \epsilon) = \tan \epsilon \approx \epsilon$ kan vi approximera ϵ genom att lösa ekvationen $1 = \epsilon(\pi/2 + k\pi - \epsilon)$ dvs. $\epsilon^2 - \epsilon(\pi/2 + k\pi) + 1 = 0$ och ta minsta positiva roten, som kan approximeras med $1/(\pi/2 + k\pi)$. Detta ger nästan tre korrekta decimaler för startvärdena och Newtons metod konvergerar på tre iterationer.

Newtoniterationen blir $x_{k+1} = x_k - (\tan x_k - x_k)/(1 + \tan^2 x_k - 1) = x_k - 1/\tan x_k + x_k/\tan^2 x_k$. Här följer koden:

```
function r = newton
r = pi/2 + pi * (1:100)' - 1e-3; % startapproximationer

for k = 1:15                      % Newtoniterationen
  t = tan(r);
  r  = r - 1 ./ t + r ./ t.^2;
end
```

3. Vi börjar med att skriva om systemet på standardform och dividerar därför första ekvationen med t och multiplicerar andra ekvationen med $1 + v^2$:

$$\begin{cases} v'' = t + (vv'z + z' + w^2)/t \\ z'' = (1 + v^2)(z - v/(v' + t) - w) \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}$$

Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$, $y_4 = z' = y_3'$, $y_5 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t + (y_1 y_2 y_3 + y_4 + y_5^2)/t \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = (1 + y_1^2)\,(y_3 - y_1/(y_2 + t) - y_5) \\ y_5' = y_5 - y_3 - 2y_1 y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(2) = -0.3 \\ y_2(2) = -0.3 \\ y_3(2) = -0.1 \\ y_4(2) = -0.2 \\ y_5(2) = 0.4 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(2, 3, 50), [-0.3 -0.3 -0.1 -0.2 0.4]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t+(y(1)*y(2)*y(3)+y(4)+y(5)^2)/t; y(4); ...
      (1+y(1)^2)*(y(3)-y(1)/(y(2)+t)-y(5)); y(5)-y(3)-2*y(1)*y(4)];
```

4. a) Nej, det är inte entydigt. $p(t) + c$, där c är en konstant satsfierar också villkoren.

b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt. Vi antar, av symmetriskäl, att $a < b < c$ med $a = -c$ och $b = 0$. Vi noterar att formeln är exakt för alla udda k. Resterande ekvationer blir:

$$\begin{cases} 2 = w(1 + 1 + 1), \quad k = 0 \\ 2/3 = w(2a^2), \quad k = 2 \end{cases}$$

Ekvationerna satisfieras av $w = 2/3$ och $a = 1/\sqrt{2}$. När $k = 3$ blir integralen 0 vilken också metoden ger. När $k = 4$ blir integralen $2/5$ men metoden ger $1/3$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

5. Resultatet är ett tal som vi lagrar i σ. Notera att $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^2\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x})$ eftersom $\mathbf{A}$ är symmetrisk. Analogt gäller att $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-2}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})$. Algoritmen kan formuleras som följer:

$\eta = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$	n +, *
$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\sigma = \eta + \mathbf{x}^T\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{s}$	$2n$ *, +
beräkna $\mathbf{A}$s LU-faktorisering, spara i $\mathbf{A}$	$n^3/6$ +, *
kopiera $\mathbf{s} = \mathbf{x}$	
lös $\mathbf{LUs} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
$\sigma = \sigma + \mathbf{x}^T\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{s}$	$2n$ *, +
$\sigma = \sigma/(\eta^2 + 2\eta)$	$2n$ *, +

$\mathbf{s}$ är en temporär vektor om n element. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/6$ +,*.
$\mathbf{x}^T\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\mathbf{s}$ kan skrivas $\mathbf{x}^T\mathbf{t}$ om man bildar den temporära vektorn $\mathbf{t} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$. Man sparar då n *, men det lär inte gå snabbare ($n^3/6$ dominerar så fullständigt).

6. Logaritmera:

$$\log c = p \log 10 + (p/q)t - rt^2$$

Inför $x_1 = p$, $x_2 = p/q$ och $x_3 = r$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[\log 10, t_k, -t_k^2]$, $k = 1, \ldots, m$ och $b_k = \log c_k$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $p = x_1$, $q = p/x_2$ och $r = x_3$.