Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2010-08-19

1. (a)

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_\infty \; ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty = \left|\left|\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty \left|\left|\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\right|\right|_\infty = 11 \cdot 6 = 66$$

(b) `log(0)=-Inf`, `abs(-Inf)=Inf`, `log(Inf)=Inf`.
`-1/0=-Inf`, `exp(-Inf)=0`, `1/0=Inf`, `exp(Inf)=Inf`. Så svaret blir `Inf, Inf`.

(c) Faktoriseringen blir (först $\mathbf{LU}$ sedan $\mathbf{LDL}^T$ och sist $\mathbf{CC}^T$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

(d) Normalekvationerna $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\;\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, där $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ = `8*ones(2)` och $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ = `36*ones(2,1)` så att alla lösningar är $2.25\,[1,\;1]^T + \xi\,[1,\;-1]^T,\;\xi \in \mathbb{R}$.

(e) Ja, det är en vektornorm. Vi kontrollerar de tre villkoren. Låt $f(\mathbf{x}) = |x_1 - x_2| + |x_2|$.

i. Antag att $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Om $x_2 \neq 0$ så är normen positiv. Om $x_2 = 0$ så är $x_1 \neq 0$ och normen är positiv.

ii. $f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha\;x_1 - \alpha\;x_2| + |\alpha\;x_2| = |\alpha|\,|x_1 - x_2| + |\alpha|\,|x_2| = |\alpha|\,f(\mathbf{x})$.

iii. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = |(x_1+y_1) - (x_2+y_2)| + |x_2+y_2| = |x_1 - x_2 + y_1 - y_2| + |x_2+y_2| \leq$ $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2| + |y_2| = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

(f) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x/2 + \sqrt{x}$ vilket ger $x/2 = \sqrt{x}$ så fixpunkterna är $0, 4$. Nu till konvergensen: $|g'(x)| = 0.5\,|1 + 1/\sqrt{x}|$ så att $|g'(4)| = 0.75$ så attraktiv. För $x = 0$ kan vi ej testa med derivatan (eftersom förutsättningarna i satsen ej är uppfyllda). Så vi studerar vad som händer med värdena i en typisk iteration. Tag $x_0 = \epsilon > 0$ då blir $x_1 = \epsilon/2 + \sqrt{\epsilon} > \epsilon$ för alla $0 < \epsilon < 4$, så repulsiv fixpunkt ($x_{k+1} > x_k$, vi kommer att avlägsna oss från fixpunkten).

(g) Låt $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ vara kolonnvektorn av ettor. Matrisen kan då skrivas $\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ varför $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{e}\mathbf{e}^T\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T\mathbf{e})^2 \geq 0$ för godtycklig $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tag $\mathbf{x} = [1, -1, 0, \ldots, 0]^T$, då är $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.

2. Newtoniterationen blir $x_{k+1} = (x_k + c/x_k)/2$. Bilda $x_{k+1} - \sqrt{c} = (x_k + c/x_k)/2 - \sqrt{c}$, som efter förenkling kan skrivas $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k^2/(2x_k)$ (precis som på en övning). $0 < x_0 \Rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_0^2/(2x_0) \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq \sqrt{c}$. Det räcker alltså att studera fallet $x_k \geq \sqrt{c}$ så att vi antar att $x_0 \geq \sqrt{c}$ från och med nu. Vi visar nu att $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k/2$ (metoden konvergerar ju i själva verket kvadratiskt, men detta räcker för att visa konvergens). $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k^2/(2x_k) = (\epsilon_k/2)\,(\epsilon_k/x_k) = (\epsilon_k/2)\,(1 - \sqrt{c}/x_k) \leq \epsilon_k/2$ eftersom $0 < \sqrt{c}/x_k \leq 1$. Alltså gäller att $0 \leq \epsilon_k \leq \epsilon_0/2^k, k = 1, 2, \ldots$ vilket visar konvergensen.

3. Vi börjar med att skriva om systemet på standardform och dividerar därför första ekvationen med t och multiplicerar andra ekvationen med $1 + v^2$:

$$\begin{cases} v'' = t + (vv'z + z' + w^2)/t \\ z'' = (1+v^2)(z - v/(v'+t) - w) \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}$$

Inför $y_1 = v$, $y_2 = v' = y_1'$, $y_3 = z$, $y_4 = z' = y_3'$, $y_5 = w$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = t + (y_1y_2y_3 + y_4 + y_5^2)/t \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = (1+y_1^2)\,(y_3 - y_1/(y_2+t) - y_5) \\ y_5' = y_5 - y_3 - 2y_1y_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-3) = -0.3 \\ y_2(-3) = -0.3 \\ y_3(-3) = -0.1 \\ y_4(-3) = -0.2 \\ y_5(-3) = 0.4 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-3, -1, 50), [-0.3 -0.3 -0.1 -0.2 0.4]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(2); t+(y(1)*y(2)*y(3)+y(4)+y(5)^2)/t; y(4); ...
      (1+y(1)^2)*(y(3)-y(1)/(y(2)+t)-y(5)); y(5)-y(3)-2*y(1)*y(4)];
```

4. a) Vi ansätter p på formen $p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3$ och får villkoren

$$\begin{bmatrix} 1 & c & c^2 & c^3 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6c \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Koefficientmatrisen är uppenbarligen ickesingulär (determinanten är ju 12) varför ekvationssystemet har en endtydigt bestämd lösning.

b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt.
Vi noterar att formeln är exakt för alla udda k. Resterande ekvationer blir:

$$\begin{cases} 2 = 2(w_1 + w_2), \quad k = 0 \\ 2/3 = 2(w_1 + w_2 a^2), \quad k = 2 \\ 2/5 = 2(w_1 + w_2 a^4), \quad k = 4 \\ \ldots \end{cases}$$

Första ekvationen ger $w_2 = 1 - w_1$ sätt in detta i ekvationerna för $k = 2, 4$ och lös för w_1 som blir $1/6$. $k = 0$ ger $w_2 = 5/6$ och $k = 2$ ger $a = 1/\sqrt{5}$. När $k = 6$ blir integralen $2/7$ men metoden ger $26/75$. Så det polynomiella gradtalet är fem.

5. Resultatet är en vektor som vi lagrar i $\mathbf{t}$. Notera att $\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{x})^T (\mathbf{A}^T \mathbf{x})$.
Algoritmen kan formuleras som följer:

$\mathbf{s} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$	n^2 +, *
$\eta = \mathbf{s}^T \mathbf{s} + 2\,(\mathbf{x}^T \mathbf{x})$	$2n$ *, +
$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{A}^T \mathbf{s}$	n^2 +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/3$ +, *
kopiera $\mathbf{s} = \mathbf{x}$	
lös $\mathbf{LU}\mathbf{s} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{s}$	n +
lös $\mathbf{LU}\mathbf{t} = \mathbf{t}$	n^2 +, *
$\mathbf{t} = \mathbf{t}\,(1/\eta)$	n +

$\mathbf{s}$ är en temporär vektor om n element, svaret lagras i $\mathbf{t}$. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Logaritmera:

$$\log c - \log q = 1 + t\,p/q \Leftrightarrow \log c - 1 = \log q + t\,p/q$$

Inför $x_1 = \log q$ och $x_2 = p/q$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[1, t_k], k = 1, \ldots, m$ och $b_k = \log c_k - 1$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $q = e^{x_1}$ och $p = q\,x_2$.