Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys

2011-01-10

1. (a)

$$1 = ||\mathbf{I}||_\infty = ||\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}||_\infty \le ||\mathbf{A}||_\infty\ ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty = \kappa_\infty(\mathbf{A})$$

(b) `log(1/(1 + 1e-8^2) - 1) = log(1/1 - 1) = log(0) = -Inf`,
`exp(1 / exp(1e3)) = exp(1/Inf) = exp(0) = 1`. Så svaret blir `-Inf, 1`.

(c) Faktoriseringen blir (först $\mathbf{LU}$ sedan $\mathbf{CC}^T$):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Så

$$\mathbf{A} = \mathbf{CC}^T, \text{med } \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{bmatrix}$$

(d) Normalekvationerna $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, där

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så att $\mathbf{x}^T = [8/9, 1/9]$.

(e) Ja, det är en vektornorm. Vi kontrollerar de tre villkoren.

i. $\mu(\mathbf{x})$ är en summa av icke-negativa tal. Antag att $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. För minst ett k gäller att $\alpha_k|x_k| > 0$ och normen är positiv.

ii. $\mu(\gamma\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k|\gamma x_k| = |\gamma| \sum_{k=1}^n \alpha_k|x_k| = |\gamma|\,\mu(\mathbf{x})$.

iii. $\mu(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k|x_k+y_k| \le \sum_{k=1}^n \alpha_k(|x_k|+|y_k|) = \mu(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{y})$.

(f) Lös $x = g(x)$ med $g(x) = x^2e^x$ vilket ger $x = 0$ eller $1/x = e^x$ som ju har en positiv rot (studera skärningen mellan $1/x$ och e^x). Nu till konvergensen: $|g'(x)| = |2xe^x + x^2e^x|$ så att $|g'(0)| = 0$ så attraktiv. För den positiva fixpunkten, kalla den x^*, gäller att $1/x^* = e^{x^*}$. Vi får då $|g'(x^*)| = x^*e^{x^*}(2+x^*) = 2 + x^* > 1$ ty $x^* > 0$, så repulsiv

(g) Låt $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ vara kolonnvektorn av ettor. Matrisen kan då skrivas $n\,\mathbf{ee}^T - \mathbf{I}$
varför $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = n\,\mathbf{x}^T\mathbf{ee}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{x} = n(\mathbf{x}^T\mathbf{e})^2 - \mathbf{x}^T\mathbf{x}$. Tag $\mathbf{x} = [1, -1, 0, \ldots, 0]^T$,
då är $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = n \cdot 0 - 2 = -2 < 0$. Tag $\mathbf{x} = [1, 1, 1, \ldots, 1]^T$, då är $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = n^3 - n > 0$.

2. Låt radien vara r och centrum (p, q). Cirkelns ekvation är då $(p-x)^2 + (q-y)^2 = r^2$. De tre ekvationerna lyder:

$$\begin{aligned} (p-a_1)^2 + (q-b_1)^2 - r^2 &= 0 \\ (p-a_2)^2 + (q-b_2)^2 - r^2 &= 0 \\ (p-a_3)^2 + (q-b_3)^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

så att Newtons metod blir

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \\ r_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{bmatrix} - 0.5 \cdot \begin{bmatrix} p_k - a_1 & q_k - b_1 & -r_k \\ p_k - a_2 & q_k - b_2 & -r_k \\ p_k - a_3 & q_k - b_3 & -r_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (p_k-a_1)^2 + (q_k-b_1)^2 - r_k^2 \\ (p_k-a_2)^2 + (q_k-b_2)^2 - r_k^2 \\ (p_k-a_3)^2 + (q_k-b_3)^2 - r_k^2 \end{bmatrix}$$

3. Inför $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = y_2' = v'$ samt $y_4 = y_3' = v''$. Systemet övergår i:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - 3(y_3)^2 - y_4 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_1 - y_2 - y_3y_4 + t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(-3) = 0 \\ y_2(-3) = -1 \\ y_3(-3) = 2 \\ y_4(-3) = -3 \end{cases}$$

```
function [t, y] = uppg3
[t, y] = ode45(@f, linspace(-3, -1, 50), [0 -1 2 -3]');

function yp = f(t, y)
yp = [y(1)+2*y(2)-3*y(3)^2-y(4); y(3); y(4); y(1)-y(2)-y(3)*y(4)+t];
```

4. Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \ldots, m$ där m är så stort som möjligt. Vi noterar att om formeln är exakt för $k = 1$ så är den exakt för alla udda k. Vi får ekvationerna:

$$\begin{cases} 2 = w_1 + w_2 + w_3, \quad k = 0 \\ 0 = -w_1 + w_3, \quad k = 1 \\ 2/3 = w_1 + w_3, \quad k = 2 \end{cases}$$

Vi kan satisfiera ekvationerna genom att välja $w_1 = w_3 = 1/3$ och $w_2 = 4/3$. När $k = 3$ blir integralen 0 vilken också metoden ger. När $k = 4$ blir integralen $2/5$ men metoden ger $2/3$. Så det polynomiella gradtalet är tre.

Metoden på intervallet $[0, 1]$ får vi via variabeltransformationen, $t = (x + 1)/2$ (som avbildar $[-1, 1]$ på $[0, 1]$).

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}\left[f(0) + 4f(1/2) + f(1)\right]$$

5. Resultatet är en vektor som vi lagrar i $\mathbf{x}$. Algoritmen kan formuleras som följer:

$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\eta = \mathbf{x}^T\mathbf{t}$	n *, +
$\mathbf{t} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$	n^2 +, *
$\mathbf{s} = \mathbf{A}^T\mathbf{t} + \mathbf{t}$	n^2 +, *
beräkna **A**s LU-faktorisering, spara i **A**	$n^3/3$ +, *
lös $\mathbf{LUs} = \mathbf{s}$	n^2 +, *
kopiera $\mathbf{t} = \mathbf{x}$	
lös $\mathbf{LUt} = \mathbf{t}$	n^2 +, *
$\eta = \eta + \mathbf{x}^T\mathbf{t}$	n *, +
$\mathbf{x} = \mathbf{s}\,(1/\eta)$	n *

$\mathbf{s}, \mathbf{t}$ är temporära vektorer om n element, svaret lagras i $\mathbf{x}$. Faktoriseringskostnaden dominerar med $n^3/3$ +,*.

6. Logaritmera:

$$\log c = \log(p + q) + 1 + t\,p/q \Leftrightarrow \log c - 1 = \log(p + q) + t\,q/p$$

Inför $x_1 = \log(p + q)$ och $x_2 = p/q$. Raderna i $\mathbf{A}$ innehåller $[1, t_k], k = 1, \ldots, m$ och $b_k = \log c_k - 1$. Efter att vi har löst $\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ sätter vi $q = e^{x_1}/(1 + x_2)$ och $p = q\,x_2$.