Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2009-05-29, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Ida Säfström, tel. 076-272 18 61.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
   Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

   (a) Visa att multiplikation, enligt flyttalsstandarden, av två normaliserade flyttal är en stabil algoritm. Du kan anta att produkten kan representeras som ett normaliserat flyttal. (1p)

   (b) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `exp(1/0-2/0), sin(atan(-1/0))` (1p)

   (c) Vi använder en ODE-lösare och får ett felmeddelande att lösaren får ta många korta steg. Vilka slags egenskaper hos problemet skulle kunna orsaka felutskriften? Ange två orsaker. (1p)

   (d) Använd Choleskyfaktorisering för att bestämma de α för vilka $\mathbf{A}$ är positivt definit.

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \Re, \quad (2p)$$

   (e) $\mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ där $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre kolonnvektorer som satisfierar $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{c} = \mathbf{b}^T\mathbf{c} = 0$, $||\mathbf{a}||_2 = 5$, $||\mathbf{b}||_2 = 2$ och $||\mathbf{c}||_2 = 4$. Beräkna det $\mathbf{x}$ som minimerar: $||\ \mathbf{A}\mathbf{x} - (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})||_2$, där $\mathbf{a}^T\mathbf{d} = \mathbf{b}^T\mathbf{d} = \mathbf{c}^T\mathbf{d} = 0$. (2p)

   (f) Antag att matrisen $\mathbf{Q} \in \Re^{m\times n}$ satisfierar $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Bevisa att $||\mathbf{Q}\mathbf{x}||_2 = ||\mathbf{x}||_2$ för varje $\mathbf{x} \in \Re^n$. (1p)

   (g) Bestäm fixpunkterna till följande iteration och avgör om det är möjligt att få konvergens mot respektive fixpunkt om vi startar nära, men inte i, fixpunkten. $x_{k+1} = x_k(2 - 10\ x_k)$. (2p)

Var god vänd!

2. Vi söker en kolonnvektor, $\mathbf{x}$, som satisfierar villkoren:

$$||\mathbf{x}||_2 = 1 \text{ och } \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}} = 1, \text{ med } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 100 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [2, 3]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} v'' = t^2 + (v+z)v' + z' + w^2 \\ z'' = z - v/(v'+t) - w \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = 3, \ v'(2) = -3 \\ z(2) = 1, \ z'(2) = 2 \\ w(2) = 4 \end{cases} \quad (3p)$$

4. a) Bestäm interpolationspolynomet (valfri metod), $p(t)$, som interpolerar punkterna $(1, 2)$, $(2, 4)$ och $(4, 5)$ och använd polynomet för att approximera $p(3)$. (1.5p)

   b) Välj w_1, w_2 och ξ i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1 f(-\xi) + w_2 f(0) + w_1 f(\xi), \quad \xi > 0$$

5. $\mathbf{A}$ är en osymmetrisk och ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är kolonnvektorer med n element. Vi vill beräkna

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}\mathbf{x}^T - \mathbf{I} + 2\mathbf{A} - 3\mathbf{A}^2)\mathbf{x} - 4\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Ingen av $\mathbf{A}$ eller $\mathbf{x}$ behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där c beror av t på följande sätt:

$$c \approx \sqrt{t + p_1} - 2p_2$$

   p_1 och p_2 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \ldots, (t_m, c_m)$.
   Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem. Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p_1 och p_2 från $\mathbf{x}$. Kan detta orsaka några problem? Finns det något annat viktigt vi måste tänka på när vi har bestämt parametrarna? (3p)