Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2010-01-14, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Fredrik Lindgren, tel. 0703-08 83 04.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Vad menas med att ett problem är illa konditionerat? (1p)

(b) Vilken utskrift ger Matlab av följande? `sin(0)/0-1, log(exp(10000))-exp(log(10000))` (1p)

(c) Definiera begreppet positivt definit matris. (1p)

(d) Beräkna Choleskyfaktorisering av följande matris:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (1p)$$

(e) $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^n$ är r kolonnvektorer som satisfierar $\mathbf{q}_j^T \mathbf{q}_k = 0,\ j \neq k$ och $||\mathbf{q}_k||_2 = d_k > 0,\ k = 1, ..., r$. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Lös följande problem, ge lösningen på så enkel form som möjligt.

$$\min_{x_1,\ldots,x_r} \left|\left| \mathbf{b} - \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbf{q}_k \right|\right|_2, \quad (2p)$$

(f) Låt $||\ ||$ beteckna en godtycklig vektornorm och låt c vara ett positivt reellt tal. Gäller det att även $c\,||\ ||$ är en vektornorm? Ge bevis eller motexempel. (2p)

(g) a och b är reella tal med $a < b$. Definiera fixpunktsiterationen: $x_{k+1} = x_k + (x_k - a)(x_k - b)$. Bestäm fixpunkterna och ett villkor för a och b som garanterar konvergens mot åtminstone en av fixpunkterna (vi startar nära, men inte i, fixpunkten). Är det möjligt att få konvergens mot alla fixpunkterna (utan att starta i respektive fixpunkt)? (2p)

Var god vänd!

---

2. Vi vill hitta en funktion på formen $f(x) = ax + bx^2 + \cos(cx)$ som satisfierar följande villkor: $f(1) = 1$, $f'(1) = 1.23$ och $f(2) = 0.75$. a, b och c skall alltså bestämmas. Ställ upp ett system av ekvationer, för problemet, och formulera sedan Newtons metod för detta system. Försök **inte** att lösa systemet för hand. (3p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 100 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [-4, -3]$. Koden skall utnyttja `ode45`.
$$\begin{cases} v'' = t^2 + vv'z + z' + w^2 \\ z'' = z - v/(v' + t) - w \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}, \quad \begin{cases} v(-4) = -0.3, \; v'(-4) = -0.3 \\ z(-4) = -0.1, \; z'(-4) = -0.2 \\ w(-4) = 0.4 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

4. a) Bevisa att interpolationspolynomet (som vi har definierat det) är entydigt bestämt. (1.5p)

   b) Välj w_1 och w_2 i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w_1(f(-1) + f(1)) + w_2(f(-1/2) + f(1/2))$$

5. $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är symmetriska, ickesingulära matriser av ordning n. $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med n element. Vi vill beräkna
$$\mathbf{t} = \left((\mathbf{AB})^{-2} + 2(\mathbf{AB})^{-1} + 3\mathbf{AB}\right)\mathbf{x}$$
   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är stora och glesa. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? Ingen av $\mathbf{A}$ eller $\mathbf{B}$ behöver finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där c beror av t på följande sätt:
$$c \approx \sqrt{t + p_1 p_2} + \sqrt{2p_2}$$
   p_1 och p_2 är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \ldots, (t_m, c_m)$.
   Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem. Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p_1 och p_2 från $\mathbf{x}$. (3p)