Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2010-05-26, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Jonatan Vasilis, tel. 0703-08 83 04.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Beräkna $\kappa_1(\mathbf{A})$ (konditionstalet i ettnorm) då

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1p)$$

(b) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
`log(exp(1.2e10/0)), asin(sin(0) / 0 - 0 / sin(0))` (1p)

(c) Beräkna $\mathbf{A}$:s $\mathbf{LDL}^T$-faktorisering, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (1p)$$

(d) Låt $\mathbf{e}$ = `ones(8, 1)` (med Matlab-notation). Lös följande problem (dvs. beräkna ξ) då du vet att $\sum_{k=1}^{8} b_k = 3.2$.

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}} ||\, \mathbf{e}\, \xi - \mathbf{b}||_2\,, \qquad (1p)$$

(e) Låt $f(\mathbf{x}) = c_1|x_1| + c_2|x_2|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Härled villkor för de reella talen c_1 och c_2 så att f bildar en vektornorm på $\mathbb{R}^2$. (2p)

(f) Definiera fixpunktsiterationen: $x_{k+1} = x_k + \cos(x_k - 1)$. Bestäm fixpunkterna. Vilka av dessa är attraktiva fixpunkter? (2p)

(g) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är en symmetrisk matris som **inte** är positivt definit. Visa att det existerar $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ så att $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ är positivt definit för alla $\alpha > \alpha_0$. (2p)

Var god vänd!

2. Låt $f(x) = \tan(x) - x$.

   - Bevisa (grafiskt) att f har oändligt många positiva nollställen. Vi vill använda Newtons metod för att beräkna de hundra första positiva nollställena till f. Hitta rimliga startvärden till Newtons metod (jag vill ha numeriska värden). (1.5p)
   - Skriv ett **vektoriserad** variant av Newtons metod som hittar approximationer till alla 100 nollställena genom att exekvera **en** Newton-loop 15 gånger. Använd startvärdena från föregående uppgift. Programmet skall skrivas som en **Matlab-funktion**. (1.5p)

   Du kan eventuellt ha användning av följande Taylorapproximation: $\tan x \approx x + x^3/3$ för x nära noll.

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 50 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [2, 3]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} t\,v'' = t^2 + vv'z + z' + w^2 \\ z''/(1+v^2) = z - v/(v'+t) - w \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}, \quad \begin{cases} v(2) = -0.3,\ v'(2) = -0.3 \\ z(2) = -0.1,\ z'(2) = -0.2 \\ w(2) = 0.4 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

4. a) Givet punkterna (t_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ söker vi ett polynom, p, av högst grad $n-1$ sådant att $p'(t_k) = y_k, k = 1, \ldots, n$. Är polynomet entydigt bestämt? Ge bevis (om så är fallet), ge motexempel (om så inte är fallet). (1p)

   b) Välj w samt a, b och c i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (2p)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx w(f(a) + f(b) + f(c))$$

5. $\mathbf{A}$ är en symmetrisk, ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med n element. Vi vill beräkna

$$\frac{\mathbf{x}^T\left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-2}\right)\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T(\mathbf{x}\mathbf{x}^T + 2\mathbf{I})\mathbf{x}}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där c beror av t på följande sätt:

$$c \approx 10^p\ e^{((p/q)t - rt^2)}$$

   p, q och r är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden
   $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \ldots, (t_m, c_m)$.
   Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem.
   Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p, q och r från $\mathbf{x}$. (3p)