Thomas Ericsson
Matematik, Chalmers/GU

Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2010-08-19, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Ragnar Freij, tel. 0703-08 83 04.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www em. 20/8.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Beräkna $\kappa_\infty(\mathbf{A})$ (konditionstalet i maxnorm) då

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1p)$$

(b) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
`log(abs(log(0))), exp(1/exp(-1/0))` (1p)

(c) Beräkna **A**:s Cholesky-faktorisering, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (1p)$$

(d) Låt $\mathbf{A} =$ `ones(8, 2)` och $\mathbf{b} =$ `(1:8)'` (med Matlab-notation). Beräkna **alla** lösningar till följande problem:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} \| \, \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \, \|_2 \, , \qquad (1p)$$

(e) Bildar $|x_1 - x_2| + |x_2|$ en vektornorm på $\mathbb{R}^2$? Ge ett bevis om så är fallet, ge ett motexempel annars. (2p)

(f) Definiera fixpunktsiterationen: $x_{k+1} = x_k/2 + \sqrt{x_k}$.
Bestäm fixpunkterna. Vilken av dessa är attraktiv? (2p)

(g) **A** är en kvadratisk matris, av ordning $n \geq 1$, där alla element är ett. Bevisa att **A** är positivt semidefinit men inte positivt definit. (2p)

Var god vänd!

2. Vi löser $x^2 = c$, där c är en positiv konstant, med Newtons metod. Metoden råkar vara globalt konvergent (varje $x_0 > 0$ ger konvergens mot $\sqrt{c}$) vilket normalt inte gäller för Newtons metod. Uppgiften är att bevisa denna globala konvergens, med hjälp av följande steg. (3p)

   - Ställ upp Newtons metod för problemet.
   - Antag att $0 < x_0$. Inför $\epsilon_k = x_k - \sqrt{c}$ och formulera ett samband mellan ϵ_{k+1} och ϵ_k.
   - Visa att det räcker att studera fallet $x_0 \geq \sqrt{c}$.
   - Visa slutligen att $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k/2$ och $0 \leq \epsilon_k \leq \epsilon_0/2^k$, $k > 0$.
   - Ovanstående bevisar konvergensen, varför?

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 50 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [-3, -1]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} t\, v'' = t^2 + vv'z + z' + w^2 \\ z''/(1+v^2) = z - v/(v'+t) - w \\ w' = w - z - 2vz' \end{cases}, \quad \begin{cases} v(-3) = -0.3,\ v'(-3) = -0.3 \\ z(-3) = -0.1,\ z'(-3) = -0.2 \\ w(-3) = 0.4 \end{cases} \quad (3p)$$

4. a) c samt $a_k, k = 1, \ldots, 4$ är fem (konstanta) reella tal. Bevisa att det existerar ett entydigt bestämt polynom, p, av högst grad tre sådant att $p^{(k)}(c) = a_{k+1}, k = 0, 1, 2, 3$ (k är ett index för derivatan där $k = 0$ svarar mot $p(c)$). (1.5p)

   b) Välj w_1, w_2 samt $a > 0$ i kvadraturformeln nedan, så att den får så högt polynomiellt gradtal som möjligt. Vad blir detta gradtal? (1.5p)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(-a) + w_2 f(a) + w_1 f(1)$$

5. $\mathbf{A}$ är en **osymmetrisk**, ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med n element. Vi vill beräkna

$$\frac{\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + 2\mathbf{I})\mathbf{x}}$$

   Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c/q \approx e^{(1+t\,p/q)}$$

   p och q är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden
   $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \ldots, (t_m, c_m)$.
   Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem.
   Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p och q från $\mathbf{x}$. (3p)