Tentamen: Numerisk Analys, MMG410 (MAN200, MAM240), GU, 2011-01-10, V

Skrivtid:	08.30-13.30.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@chalmers.se.
Vakt:	Magnus Goffeng, tel. 0703-08 83 04.
Resultat:	Kontakta vår studieexpedition. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart.
Lösningsförslag:	På www efter 19.
Gräns för godkänt:	12.5 poäng av maximalt 25 räcker för godkänt, 18.5 poäng för VG.
Hjälpmedel:	Inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter!
Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

(a) Bevisa att $1 \leq \kappa_\infty(\mathbf{A})$ där $\kappa_\infty(\mathbf{A})$ är konditionstalet i maxnorm och $\mathbf{A}$ är en ickesingulär matris. (1p)

(b) Vilken utskrift ger Matlab av följande?
`log(1/(1 + 1e-8^2) - 1), exp(1 / exp(1e3))` (1p)

(c) Beräkna $\mathbf{A}$:s Cholesky-faktorisering, då:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (1\text{p})$$

(d) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 2}$ där $\mathbf{A}$:s första kolonn består av enbart ettor och $\mathbf{A}$:s andra kolonn består av en etta i första raden och resten nollor. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{10}$ med $b_2 = 0$ och $b_k = 1$ för övriga värden på k. Lös följande problem:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} ||\ \mathbf{Ax} - \mathbf{b}\ ||_2\,, \quad (1\text{p})$$

(e) Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ och låt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vara n positiva tal. Bildar $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k |x_k|$ en vektornorm på $\mathbb{R}^n$? Ge ett bevis om så är fallet, ge ett motexempel annars. (2p)

(f) Definiera fixpunktsiterationen: $x_{k+1} = x_k^2\, e^{x_k}$. Visa att iterationen har två fixpunkter där den ena är attraktiv och den andra är repulsiv. (2p)

(g) Låt $\mathbf{A}$ = `n * ones(n) - eye(n)`, med Matlab-notation. Bevisa att $\mathbf{A}$ är indefinit för varje $n \geq 2$. (2p)

Var god vänd!

2. Givet tre distinkta punkter (a_1, b_1), (a_2, b_2) och (a_3, b_3) (som inte ligger på en rät linje) vill vi bestämma centrum och radie för en cirkel som går genom punkterna. Formulera ekvationerna som behövs för att bestämma cirkeln och ställ sedan upp Newtons metod för ekvationerna. Försök **inte** att lösa problemet för hand. (3p)

3. Skriv om följande problem på standardform och skriv sedan den **Matlabkod** som behövs för att beräkna approximationer till lösningen för 50 ekvidistanta t-värden i intervallet $t \in [-3, -1]$. Koden skall utnyttja `ode45`.

$$\begin{cases} u' = u + 2v - 3(v')^2 - v'' \\ v''' = u - v - v'v'' + t \end{cases}, \quad \begin{cases} u(t_0) = 0, \\ v(t_0) = -1, v'(t_0) = 2, v''(t_0) = -3 \end{cases}, \quad t_0 = -3 \quad \text{(3p)}$$

4. Välj w_1, w_2, w_3 i kvadraturformeln nedan, så att den får så hög "polynomial degree" som möjligt. Vad blir detta gradtal?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$$

Hur ser formeln ut på intervallet $[0, 1]$, dvs. **givet formeln ovan**, hur ser formeln ut för integralen

$$\int_{0}^{1} f(x)dx$$

(vi vill ha samma "polynomial degree" för denna formel)? (3p)

5. $\mathbf{A}$ är en **osymmetrisk**, ickesingulär matris av ordning n. $\mathbf{x}$ är en kolonnvektor med n element. Vi vill beräkna

$$\frac{\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{I}\right)\mathbf{A}^T\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1})\mathbf{x}}$$

Skriv, i punktform, hur man löser ovanstående problem på ett **bra** sätt (bra vad avser beräkningsfel, cpu-tid och minnesbehov). Slarva inte med detaljerna! Din lösningsmetodik skall fungera även om $\mathbf{A}$ är stor och gles. Hur många flyttalsoperationer krävs (uttryckt i n)? $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$ behöver inte finnas kvar efter beräkningen. (3p)

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx (p + q)\, e^{(1 + t\, p/q)}$$

p och q är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), \ldots, (t_m, c_m)$.
Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett **linjärt** minstakvadratproblem.
Matrisen $\mathbf{A}$ samt vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller p och q från $\mathbf{x}$. (3p)