## 1.6 Lösningar till kapitel 8

**1:**

```
function I = int_quad(t, C)
% Compute the integral (over [t(1), t(end)]), of the piecewise
% quadratic polynomial defined by t and C.

I = sum(C(1, :) .* (t(2:end).^3 - t(1:end-1).^3)) / 3 + ...
    sum(C(2, :) .* (t(2:end).^2 - t(1:end-1).^2)) / 2 + ...
    sum(C(3, :) .* (t(2:end)    - t(1:end-1)));
```

Här följer ett körningsexempel:

```
>> n = 22;
>> t = linspace(0, 10, n);
>> y = exp(-0.2 * t) .* cos(2 * t);
>> d = -0.2582;
>> C = inter_quad(t, y, [0 1 d]);  % d = derivatan i t(end)

>> integral = int_quad(t, C)
integral = 1.066075101465120e-01
>> err = quadl('exp(-0.2 * t) .* cos(2*t)', 0, 10) - integral
err = 1.3286e-03
```

Om man plottar funktionen och splineapproximationen ser man ingen skillnad (på skärmen). Maxfelet är ungefär 0.01. Absoluta felet i integralen är ungefär 0.001.

---

**2:** LB (läroboken) 8.1. Vi använder $h = b - a = 1 - 0$ dvs. bara ett intervall (man borde använda flera). Mittpunktsmetoden ger approximationen $M = 1 \cdot f(0.5) = 1/8$ och trapetsmetoden ger $T = 1 \cdot 0.5 \cdot (0^3 + 1^3) = 1/2$. b) LB sid. 243: $E \approx (T - M)/3 = (1/2 - 1/8)/3 = 1/8$. I vårt exempel får vi värdena $I(f) - M(f) = 1/4 - 1/8 = 1/8$ respektive $I(f) - T(f) = 1/4 - 1/2 = 1/4$. c) LB sid. 243 igen: $I(f) = (2/3)M(f) + (1/3)T(f) + fel$ ger $(2/3)(1/8) + (1/3)(1/2) = 1/4$ som är exakt.
d) Det är precis vad vi förväntar oss, eftersom Simpsons formel är exakt för polynom av grad högst tre. Feltermen har utseendet:

$$\frac{h^5}{180} f^{(4)}(\xi)$$

och fjärdederivatan av ett tredjegradspolynom är noll.

---

LB 8.3. Vi utgår från att metoden är exakt för polynom av åtminstone grad noll (ett konstant polynom). Då gäller:

$$1 = \int_0^1 1 dx = \sum_{k=1}^{n} w_k p(x_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

---

LB 8.10. Vi skall välja $x_j$ så att regeln:

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \sum_{j=1}^{n} w_j p(x_j) = w \sum_{j=1}^{n} x_j^k$$

är exakt för $k = 0, 1, \cdots, m$ där $m$ är så stort som möjligt. Vi testar med följande ekvationer då $n = 3$:

$$\begin{aligned} 2 &= w(1+1+1) \quad (\Rightarrow w = 2/3) \\ 0 &= w(x_1+x_2+x_3) \\ 2/3 &= w(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\ 0 &= w(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \end{aligned}$$

Vi vet inte helt säkert hur många ekvationer, $m+1$, vi skall ställa upp. Tar vi för litet $m$ kommer $x_j$ att bero på parametrar och om vi tar för stort $m$ blir systemet inte lösbart. Fyra ekvationer verkar dock lämpligt eftersom vi har fyra obekanta. Vi torde kunna anta att $x_j$ uppvisar vissa symmetriegenskaper eftersom integrationsintervallet är symmetriskt kring nollan (det är rimligt att anta att $x_1 = -x_3$ och $x_2 = 0$). Man kan givetvis lösa systemet med "brute force" (eller med hjälp av Maple eller Mathematica). Lösningen blir (om vi sorterar $x_j$ i växande ordning): $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 1/\sqrt{2}$. Kunde vi ha tagit $m = 4$? vi testar:

$$w(x_1^4+x_2^4+x_3^4) = \frac{2}{3}\left[(-1/\sqrt{2})^4 + 0^4 + (1/\sqrt{2})^4\right] = \frac{1}{3}$$

men integralens värde är $2/5$ så metoden är exakt för polynom upp till och med grad tre (vilket är metodens "polynomial degree").

---

LB 8.12. Vi använder Taylorutveckling:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\cdots-f(x)}{h} = f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)+\cdots$$

Analogt för den andra formeln, så:

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \frac{f(x)-\left[f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\cdots\right]}{h} = f'(x)-\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)+\cdots$$

Richardsonextrapolation ger (addera formlerna):

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right] = f'(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x)+\cdots$$

---

LB 8.13. Låt $\alpha$, $\beta$ och $\gamma$ vara de koefficienterna i den sökta linjärkombinationen. Taylorutveckling ger:

$$\alpha f(x)+\beta f(x+h)+\gamma f(x+2h) =$$

$$\alpha f(x)+\beta\left[f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f''(x)+\cdots\right]+\gamma\left[f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2}f''(x)+\frac{(2h)^3}{6}f''(x)+\cdots\right] =$$

$$\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{0}f(x)+\underbrace{(\beta+2\gamma)}_{1/h}hf'(x)+\underbrace{(\beta+4\gamma)}_{0}\frac{h^2}{2}f''(x)+(\beta+8\gamma)\frac{h^3}{6}f'''(x)+\cdots$$

Om vi löser det linjära ekvationssystemet (med avseende på $\alpha$, $\beta$ och $\gamma$) så får vi: $\alpha = -3/(2h)$, $\beta = 2/h$ och $\gamma = -1/(2h)$. Den resulterande formeln blir således:

$$\frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h} = f'(x)-\frac{h^2}{3}f'''(x)+\cdots$$

---

---

**3:** Man får inte integrera över en singularitet på detta vis. Speciellt inte när integralen är divergent. Jag har sett vissa fysiktillämpningar där man utnyttjar en annan tolkning av integralen, Cauchys principalvärde, som i vårt exempel definieras enligt ($\epsilon > 0$):

$$PV \int_{-1}^{1.1} \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[ \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{1.1} \frac{dx}{x} \right] = \log \epsilon - \log 1 + \log 1.1 - \log \epsilon = \log 1.1 \approx 0.09531$$

Var och en av integralerna är divergent, men oändligheterna ($-\infty$ respektive $\infty$) kancellerar varandra. Mathematica klarar denna tolkning:

```
In[6]:= Integrate[1/x, {x, -1, 11/10}, PrincipalValue -> True]

              11
Out[6]= Log[--]
              10
```

Om vi inte gör denna speciella tolkning är integraluttrycket meningslöst, och vi får:

```
In[7]:= Integrate[1/x, {x, -1, 11/10}]

                              1                            11
Integrate::idiv: Integral of - does not converge on {-1, --}.
                              x                            10
```

Trapetsmetoden kommer att ge oss ett värde förutsatt att inget $x_k = 0$. Normalt kommer det beräknade värdet att sakna mening. Om vi otur (eller otur; det beror på hur man ser det) så är $x_k$-värdena arrangerade så att vi får kancellation. Här har jag valt punkterna på ett mycket speciellt sätt så att vi approximerar Cauchys principalvärde. Följande rader visar ett dyrt sätt att beräkna $\int_1^{1.1} dx/x$:

```
>> xk = linspace(-1, 1.1, 21001);
>> xk = xk([1:10000, 10002:21001]); % tag bort nollan

% Trapetsformeln
>> ti = (xk(2) - xk(1)) * (sum(1 ./ xk) - 0.5 * (xk(1) + xk(end)))
ti = 9.5301e-02

>> ti - log(1.1) % kontroll
ans = -9.5453e-06
```

Ändrar jag **lite** på punkterna får jag stora ändringar i approximation (vilket tyder på att något är fel).

```
>> xk = linspace(-1, 1.1, 21000);
>> ti = (xk(2) - xk(1)) * (sum(1 ./ xk) - 0.5 * (xk(1) + xk(end)))
ti = 3.3073e-01

>> xk = linspace(-1, 1.1, 21002);
>> ti = (xk(2) - xk(1)) * (sum(1 ./ xk) - 0.5 * (xk(1) + xk(end)))
ti = -1.4013e-01
```

Ovanstående exempel är enkelt att analysera. Ett problem som

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}$$

är svårare att hantera. Vi måste veta om nämnaren har någon reell rot, singularitet, i intervallet $[-2, -1]$. Maple ger nonens-svaret:

```
>> q := x^5 + 2*x^4 + 3*x^3 + 4*x^2 + 5*x + 6;
>> evalf(int(1/q, x = -2..-1));
                     .1207085590 - .2780503399 I
```

(`evalf` är "evaluate floating" dvs. ge en numerisk approximation och inte ett exakt svar.) Integralen av en reell funktion över ett reellt intervall torde knappast ge ett komplext resultat. Mathematicas **numeriska** integrationsrutin ger varningarna:

```
In[6]:= NIntegrate[1/q, {x, -2, -1}]

NIntegrate::slwcon:
   Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following:
    singularity, value of the integration being 0, oscillatory integrand, or
    insufficient WorkingPrecision. If your integrand is oscillatory try using
    the option Method->Oscillatory in NIntegrate.

NIntegrate::ncvb:
   NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 7
     recursive bisections in x near x = -1.48828.

Out[6]= -1.62332
```

Även `quadl` klagar:

```
>> quadl('1 ./ (x.^5 + 2*x.^4 + 3*x.^3 + 4*x.^2 + 5*x + 6)', -2, -1)
Warning: Divide by zero.
> In /usr/lic/Matlab6.0/toolbox/matlab/funfun/inlineeval.m at line 13
etc.

Warning: Infinite or Not-a-Number function value encountered.
> In /usr/lic/Matlab6.0/toolbox/matlab/funfun/quadl.m at line 98
ans = Inf
```

Vi kan slutligen se vad problemet beror på:

```
>> roots(1:6)
ans =
  5.5169e-01 + 1.2533e+00i
  5.5169e-01 - 1.2533e+00i
 -1.4918e+00                 % OBS!
 -8.0579e-01 + 1.2229e+00i
 -8.0579e-01 - 1.2229e+00i
```

Vi har alltså en singularitet, $x \approx -1.4918$, i intervallet. Singulariteten är inte integrerbar, vi har ju en integral av typen:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{p(x)(x-r)}$$

där $r$ är nollstället och $p$ är ett polynom med enbart komplexa rötter. Följande går dock bra. Varför?

```
>> quadl('(x+1.491797988139901)./(x.^5+2*x.^4+3*x.^3+4*x.^2+5*x+6)',-2,-1)
ans = 9.299752262082477e-02
```

**4:** Med substitutionen övergår integralen till:

$$2\int_0^1 e^{t^2}dt$$

Partialintegration ger:

$$2\left[e - \int_0^1 \sqrt{x}e^x dx\right]$$

```
>> i1 = quadl('exp(x) ./ sqrt(x)', 0, 1)
Warning: Divide by zero.
i1 = 2.925303907172242

>> i2 = 2 * quadl('exp(t.^2)', 0, 1)
i2 = 2.925303526955979

>> i3 = 2 * (exp(1) - quadl('sqrt(x) .* exp(x)', 0, 1))
i3 = 2.925306133252148

>> [i1 i2 i3] - 2.92530349181436  % felen
ans = 4.1536e-07   3.5142e-08   2.6414e-06
```

Man kan sätta om toleransen i `quadl` om man vill ha ett mindre fel. Standardtoleransen är $10^{-6}$. Integranderna ovan kräver ett varierande antal funktionsberäkningar. Den första kräver 469 (med standardtoleransen), den andra tar 18 och den tredje 78. Detta beror (sannolikt) på att den första integranden har en singularitet. Den tredje har en singularitet i förstaderivatan. Mittenfunktionen har dock ingen singularitet i funktion eller derivator. Vi ser också att felet är minst för mittenvarianten. Om man minskar toleransen till $10^{-14}$ krävs, 5089, 198 respektive 1188 funktionsevalueringar.

---

**5:** Vi delar nu upp integralen i två delar, en över ett ändligt intervall, $\int_a^b f(x)dx$, och en över ett oändligt, $\int_b^\infty f(x)dx$. Om integranden avtar snabbt och om $b$ är tillräckligt stort kan den andra delen försummas (vi måste dock förvissa oss om att så är fallet genom en så kallad svansuppskattning). Ännu bättre är att uppskatta integralen (och inte försumma den). Vi uppskattar:

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{4/3}} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^{8/3}} = \frac{3}{5b^{5/3}}$$

Så om vi tar $b = 10^3$ blir integralens "svans" mindre än $6 \cdot 10^{-4}$. I själva verket är detta en bra approximation av integralens värde; för stora $x$ är ju $1 + x^2 \approx x^2$. Integralens första del blir:

```
>> quadl('1 ./ (1 + x.^2).^(4/3)', 0, 1000)
ans = 1.120245308919566
```

Exakt svar är 1.1202513003332802196552... och skillnaden är $\approx 5.991 \cdot 10^{-4}$. Så det verkar stämma rätt bra med andra ord (speciellt om vi lägger till svansuppskattningen).
En nackdel med ovanstående uppdelning är att integranden avtar långsamt. För att svansen skall bli liten (försumbar) måste $b$ vara stort.

Ett annat alternativ är att använda serieutveckling. Sätt $x = 1/z$. När $x$ är stort så är $z$ litet. Gör sedan en serieutveckling. med avseende på $z$. Så här kan man (mycket kortare) göra i Maple:

```
> f := 1 / (1 + x^2)^(4/3);
                                            1
                                  f := -----------
                                             2 4/3
                                       (1 + x )

> s := series(f, x = infinity, 8); # utveckla f kring x = infinity

        8/3            14/3              20/3   140       26/3          32/3
   (1/x)    - 4/3 (1/x)     + 14/9 (1/x)     - --- (1/x)     + O((1/x)    )
                                               81
```

Jag integrerar nu denna serie termvis från 10 till $\infty$ och får värdena:

```
> for k from 1 to 4 do evalf(subs(x = 10, -int(op(k, s), x))) od;
     .01292660814   -.00007834307963   .5914134443e-6   -.4857018624e-8
```

I Matlab lägger jag till tre korrektionstermer och använder den fjärde som feluppskattning:

```
>> quadl('1 ./ (1 + x.^2).^(4/3)', 0, 10) + ...
     .01292660814 -.00007834307963 + .5914134443e-6
ans = 1.120251305153914
>> ans - exakt
ans = 4.8219e-09  % stämmer bra med -.4857018624e-8 !
```

Nu till substitutionen. Integralen övergår i:

$$\int_0^1 \frac{t^{2/3}dt}{(t^2 + (1-t)^2)^{4/3}}$$

och

```
>> quadl('t.^(2/3) ./ (t.^2 + (1-t).^2).^(4/3)', 0, 1)
ans = 1.120251100331431
```