1.7 Lösningar till kapitel 9

1: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), y_0 = y(t_0)$. I detta fall är $f(t, y) = t + 2y$, $t_0 = 0$ och $y(0) = 1$, så vi får följande approximationer:
$y_0 = 1$ (från begynnelsevärdet)
$y_1 = y_0 + 0.1(t_0 + 2 \cdot y_0) = 1 + 0.1(0 + 2 \cdot 1) = 1.2$,
$y_2 = y_1 + 0.1(t_1 + 2 \cdot y_1) = 1.2 + 0.1(0.1 + 2 \cdot 1.2) = 1.45$,
$y_3 = y_2 + 0.1(t_2 + 2 \cdot y_2) = 1.45 + 0.1(0.2 + 2 \cdot 1.45) = 1.76$.

2: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), y_0 = y(t_0)$. I detta fall är $f(t, y) = t + 2y$, $t_0 = 3$ och $y(3) = 1$, så vi får följande approximationer:
$y_0 = 1$ (från begynnelsevärdet)
$y_1 = y_0 + 0.1(t_0 + 2 \cdot y_0) = 1 + 0.1(3 + 2 \cdot 1) = 1.5$,
$y_2 = y_1 + 0.1(t_1 + 2 \cdot y_1) = 1.5 + 0.1(3.1 + 2 \cdot 1.5) = 2.11$,
$y_3 = y_2 + 0.1(t_2 + 2 \cdot y_2) = 2.11 + 0.1(3.2 + 2 \cdot 2.11) = 2.852$.

3: $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}^{(k)}), \mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y}(t_0)$. I detta fall är $t_0 = 0$ och

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ t + y_1 + y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi får följande approximationer:

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{y}^{(0)} + 0.1\ \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 + 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{y}^{(1)} + 0.1\ \mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2.3 \\ 0.1 + 1.2 + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 2.66 \end{bmatrix}$$

4: Vi får $s_1 = h\lambda y_{k-1}$ och $s_2 = h\lambda(y_{k-1} + h\lambda y_{k-1})$ så att

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h\lambda y_{k-1} + h\lambda(y_{k-1} + h\lambda y_{k-1})}{2} = \left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right] y_{k-1}$$

Den exakta lösningen, som går genom (t_{k-1}, y_{k-1}), är

$$z(t) = e^{\lambda(t - t_{k-1})} y_{k-1}$$

så när $t = t_k$ är

$$z(t_k) = e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} y_k = e^{\lambda h} y_{k-1}$$

och det lokala felet blir:

$$y_k - z(t_k) = \left[1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right] y_{k-1} - e^{\lambda h} y_{k-1} = \mathcal{O}((h\lambda)^3)$$

Heuns metod är (sannolikt) av andra ordningen och vi förväntar oss att det globala felet uppför sig som $\mathcal{O}(h^2)$.

5: Lösningarna är: $y(t) = e^{\lambda t} y_0$ respektive $z(t) = e^{(1+\epsilon)\lambda t}(1 + \delta) y_0$. Om $\lambda < 0$ så gäller även att $(1 + \epsilon)\lambda < 0$ (eftersom $|\epsilon| < 1$). Detta medför att både $y(t) \to 0$ och $z(t) \to 0$ när $t \to \infty$ och således gäller även att $z(t) - y(t) \to 0$. Om $\lambda > 0$ är både $|y(t)|$ och $|z(t)|$ strängt växande (eftersom $y_0 \neq 0$ och $|\delta| < 1$). Enligt förutsättningarna är $\epsilon \neq 0$ så att exponenterna ej har samma värde, $\lambda \neq (1+\epsilon)\lambda$. Alltså måste lösningskurvorna avlägsna sig från varandra (när t blir tillräckligt stort), varför avståndet inte kan gå mot noll.

Det relativa felet,

$$\left|\frac{z(t)-y(t)}{y(t)}\right| = \left|\frac{z(t)}{y(t)} - 1\right| = \left|e^{\epsilon\lambda t}(1+\delta) - 1\right|$$

Om $\epsilon\lambda > 0$ växer ovanstående och om $\epsilon\lambda < 0$ så konvergerar den mot ett. I inget fall går felet mot noll.

6:

$$y(t) = e^{\lambda t}\left[y_0 + \int_0^t e^{-\lambda u} s(u)\, du\right] = e^{\lambda t}\left[y_0 + \int_{1-\delta}^1 e^{-\lambda u} s(u)\, du\right] = e^{\lambda t}\left[y_0 + s(\xi)\frac{e^{-\lambda} - e^{-\lambda(1-\delta)}}{-\lambda}\right] =$$

$$z(t) - s(\xi)\, e^{\lambda(t-1)}\frac{1-e^{\lambda\delta}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad |y(t)-z(t)| = \left|s(\xi)\frac{1-e^{\lambda\delta}}{\lambda}\right|\, e^{\lambda(t-1)}$$

Om $\lambda < 0$ så dämpas störningen ut, $y(t) \to z(t)$ och om $\lambda > 0$ ökas störningen, $|y(t) - z(t)|$ ökar med tiden.

7: Allmänt gäller att en ekvation av n-te ordningen ger upphov till ett system av n första ordningens ekvationer.
a) Sätt $u_1 = y$ och $u_2 = u_1' = y'$. Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = t + u_1 + u_2 \end{cases}, \quad u_1(0) = 1, u_2(0) = -1.$$

b, c) Sätt $u_1 = y$, $u_2 = u_1' = y'$ och $u_3 = u_2' = y''$. Vi får systemen:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_3 + tu_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = u_3 - 2u_2 + u_1 - t + 1 \end{cases}, u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 3.$$

Notera att dessa system börjar på samma sätt. Det är den sista differentialekvationen i systemet som innehåller den ursprungliga ekvationen av högre ordning.

8: Den allmänna regeln är följande. Om vi har s stycken differentialekvationer med ordningarna $n_1, n_2, \dots, n_s$ så ger det upphov till ett system, av första ordningens ekvationer, av ordning $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. Så i detta fall skall vi få $2 + 2 = 4$ ekvationer. Vi inför funktionerna $u_1 = y_1$, $u_2 = u_1' = y_1'$, $u_3 = y_2$ och $u_4 = u_3' = y_2'$. Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -GMu_1/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \\ u_3' = u_4 \\ u_4' = -GMu_3/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \end{cases}, \quad u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 0, u_4(0) = 4.$$

9: a) Bakåt Euler blir: $y_{k+1} = y_k - hy_{k+1}^2$. Om vi byter beteckningar och sätter $x = y_{k+1}$ vill vi lösa följande ekvation med avseende på x: $hx^2 + x - y_k = 0$.
b) Newtons metod lyder:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{hx_j^2 + x_j - y_k}{2hx_j + 1}$$

Observera att j är iterationsindex i Newton (dvs. k är konstant).

10: Ekvationen är separabel. Löser vi på den på ett av de vanliga sätten, får vi:

$$\int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int \frac{3}{2}dt, \quad \text{dvs.} \quad \frac{3}{2}y^{2/3} = \frac{3}{2}t + c$$

Så, $y(t) = (t + 2c/3)^{3/2}$. Begynnelsevärdet ger $y(t) = t^{3/2}$. Lösningen är inte entydig eftersom även $y(t) = 0$ är en lösning.

11: Även detta är en separabel ekvation, och vi får

$$\int \frac{dy}{2y^{3/2}} = \int dt, \quad \text{dvs.} \quad -y^{-1/2} = t + c$$

Så lösningen är av formen $y(t) = 1/(\pm t + c)^2$ (beroende på hur vi gör med minustecknet framför $-y^{-1/2}$ (det är alltid vanskligt med rationella potenser). Begynnelsevärdet ger $c = \pm 2$, så vi har två tänkbara kandidater $y(t) = 1/(t-2)^2$ och $y(t) = 1/(t+2)^2$. Vi kontrollerar genom att derivera och utnyttjar att $t = 0$ initialt varför vi är intresserade av t i en högeromgivning av nollan $(0 < t < 2)$:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(t \pm 2)^2} = \frac{-2}{(t \pm 2)^3} \quad \text{och} \quad 2\left[\frac{1}{(t \pm 2)^2}\right]^{3/2} = \frac{2}{|t \pm 2|^3} = \frac{2}{(2 \pm t)^3}$$

Så lösningen är $y(t) = 1/(t-2)^2$ som har en singularitet för $t = 2$ (det är därför lösaren klagar).

12: Idé: approximera $y''(t)$ med $(y'(t) - y'(t-h))/h$, så

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}\frac{y'(t) - y'(t-h)}{h} =$$

$$y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h}{2}(f(t, y(t)) - f(t-h, y(t-h))) = y(t) + \frac{h}{2}(3f(t, y(t)) - f(t-h, y(t-h)))$$

Detta leder till metoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})\right]$$

vilket var den andra ordningens flerstegsmetod vi såg under föreläsningen. En annan tänkbar approximation är t.ex.

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}\frac{y'(t+h) - y'(t)}{h} =$$

$$y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h}{2}(f(t+h, y(t+h)) - f(t, y(t))) = y(t) + \frac{h}{2}(f(t+h, y(t+h)) + f(t, y(t)))$$

Detta leder till den implicita flerstegsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)\right]$$