

### 1.7 Lösningar till kapitel 9

**1:**  $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . I detta fall är  $f(t, y) = t + 2y$ ,  $t_0 = 0$  och  $y(0) = 1$ , så vi får följande approximationer:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \text{ (från begynnelsevärdet)} \\ y_1 &= y_0 + 0.1(t_0 + 2 \cdot y_0) = 1 + 0.1(0 + 2 \cdot 1) = 1.2, \\ y_2 &= y_1 + 0.1(t_1 + 2 \cdot y_1) = 1.2 + 0.1(0.1 + 2 \cdot 1.2) = 1.45, \\ y_3 &= y_2 + 0.1(t_2 + 2 \cdot y_2) = 1.45 + 0.1(0.2 + 2 \cdot 1.45) = 1.76. \end{aligned}$$

**2:**  $y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . I detta fall är  $f(t, y) = t + 2y$ ,  $t_0 = 3$  och  $y(3) = 1$ , så vi får följande approximationer:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \text{ (från begynnelsevärdet)} \\ y_1 &= y_0 + 0.1(t_0 + 2 \cdot y_0) = 1 + 0.1(3 + 2 \cdot 1) = 1.5, \\ y_2 &= y_1 + 0.1(t_1 + 2 \cdot y_1) = 1.5 + 0.1(3.1 + 2 \cdot 1.5) = 2.11, \\ y_3 &= y_2 + 0.1(t_2 + 2 \cdot y_2) = 2.11 + 0.1(3.2 + 2 \cdot 2.11) = 2.852. \end{aligned}$$

**3:**  $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k)} + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}^{(k)})$ ,  $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y}(t_0)$ . I detta fall är  $t_0 = 0$  och

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ t + y_1 + y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi får följande approximationer:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{y}^{(0)} + 0.1 \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 + 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \mathbf{y}^{(1)} + 0.1 \mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2.3 \\ 0.1 + 1.2 + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.43 \\ 2.66 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**4:** Vi får  $s_1 = h\lambda y_{k-1}$  och  $s_2 = h\lambda(y_{k-1} + h\lambda y_{k-1})$  så att

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h\lambda y_{k-1} + h\lambda(y_{k-1} + h\lambda y_{k-1})}{2} = \left[ 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right] y_{k-1}$$

Den exakta lösningen, som går genom  $(t_{k-1}, y_{k-1})$ , är

$$z(t) = e^{\lambda(t-t_{k-1})} y_{k-1}$$

så när  $t = t_k$  är

$$z(t_k) = e^{\lambda(t_k-t_{k-1})} y_{k-1} = e^{\lambda h} y_{k-1}$$

och det lokala felet blir:

$$y_k - z(t_k) = \left[ 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right] y_{k-1} - e^{\lambda h} y_{k-1} = \mathcal{O}((h\lambda)^3)$$

Heuns metod är (sannolikt) av andra ordningen och vi förväntar oss att det globala felet uppför sig som  $\mathcal{O}(h^2)$ .

**5:** Lösningarna är:  $y(t) = e^{\lambda t} y_0$  respektive  $z(t) = e^{(1+\epsilon)\lambda t} (1 + \delta) y_0$ . Om  $\lambda < 0$  så gäller även att  $(1 + \epsilon)\lambda < 0$  (eftersom  $|\epsilon| < 1$ ). Detta medför att både  $y(t) \rightarrow 0$  och  $z(t) \rightarrow 0$  när  $t \rightarrow \infty$  och således gäller även att  $z(t) - y(t) \rightarrow 0$ . Om  $\lambda > 0$  är både  $|y(t)|$  och  $|z(t)|$  strängt växande (eftersom  $y_0 \neq 0$  och  $|\delta| < 1$ ). Enligt förutsättningarna är  $\epsilon \neq 0$  så att exponenterna ej har samma värde,  $\lambda \neq (1 + \epsilon)\lambda$ . Alltså måste lösningskurvorna avlägsna sig från varandra (när  $t$  blir tillräckligt stort), varför avståndet inte kan gå mot noll.

Det relativa felet,

$$\left| \frac{z(t) - y(t)}{y(t)} \right| = \left| \frac{z(t)}{y(t)} - 1 \right| = |e^{\epsilon\lambda t}(1 + \delta) - 1|$$

Om  $\epsilon\lambda > 0$  växer ovanstående och om  $\epsilon\lambda < 0$  så konvergerar den mot ett. I inget fall går felet mot noll.

**6:**

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[ y_0 + \int_0^t e^{-\lambda u} s(u) du \right] = e^{\lambda t} \left[ y_0 + \int_{1-\delta}^1 e^{-\lambda u} s(u) du \right] = e^{\lambda t} \left[ y_0 + s(\xi) \frac{e^{-\lambda} - e^{-\lambda(1-\delta)}}{-\lambda} \right] =$$

$$z(t) - s(\xi) e^{\lambda(t-1)} \frac{1 - e^{\lambda\delta}}{\lambda} \Rightarrow |y(t) - z(t)| = \left| s(\xi) \frac{1 - e^{\lambda\delta}}{\lambda} \right| e^{\lambda(t-1)}$$

Om  $\lambda < 0$  så dämpas störningen ut,  $y(t) \rightarrow z(t)$  och om  $\lambda > 0$  ökas störningen,  $|y(t) - z(t)|$  ökar med tiden.

**7:** Allmänt gäller att en ekvation av  $n$ -te ordningen ger upphov till ett system av  $n$  första ordningens ekvationer.

a) Sätt  $u_1 = y$  och  $u_2 = u'_1 = y'$ . Vi får systemet:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = t + u_1 + u_2 \end{cases}, \quad u_1(0) = 1, u_2(0) = -1.$$

b, c) Sätt  $u_1 = y$ ,  $u_2 = u'_1 = y'$  och  $u_3 = u'_2 = y''$ . Vi får systemen:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ u'_3 = u_3 + tu_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ u'_3 = u_3 - 2u_2 + u_1 - t + 1 \end{cases}, \quad u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 3.$$

Notera att dessa system börjar på samma sätt. Det är den sista differentialekvationen i systemet som innehåller den ursprungliga ekvationen av högre ordning.

**8:** Den allmänna regeln är följande. Om vi har  $s$  stycken differentialekvationer med ordningarna  $n_1, n_2, \dots, n_s$  så ger det upphov till ett system, av första ordningens ekvationer, av ordning  $n_1 + n_2 + \dots + n_s$ . Så i detta fall skall vi få  $2 + 2 = 4$  ekvationer. Vi inför funktionerna  $u_1 = y_1$ ,  $u_2 = u'_1 = y'_1$ ,  $u_3 = y_2$  och  $u_4 = u'_3 = y'_2$ . Vi får systemet:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = -GMu_1/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \\ u'_3 = u_4 \\ u'_4 = -GMu_3/(u_1^2 + u_3^2)^{3/2} \end{cases}, \quad u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 0, u_4(0) = 4.$$

**9:** a) Bakåt Euler blir:  $y_{k+1} = y_k - hy_{k+1}^2$ . Om vi byter beteckningar och sätter  $x = y_{k+1}$  vill vi lösa följande ekvation med avseende på  $x$ :  $hx^2 + x - y_k = 0$ .

b) Newtons metod lyder:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{hx_j^2 + x_j - y_k}{2hx_j + 1}$$

Observera att  $j$  är iterationsindex i Newton (dvs.  $k$  är konstant).

**10:** Ekvationen är separabel. Löser vi på den på ett av de vanliga sätten, får vi:

$$\int \frac{dy}{y^{1/3}} = \int \frac{3}{2} dt, \quad \text{dvs.} \quad \frac{3}{2} y^{2/3} = \frac{3}{2} t + c$$

Så,  $y(t) = (t + 2c/3)^{3/2}$ . Begynnelsevärdet ger  $y(t) = t^{3/2}$ . Lösningen är inte entydig eftersom även  $y(t) = 0$  är en lösning.

**11:** Även detta är en separabel ekvation, och vi får

$$\int \frac{dy}{2y^{3/2}} = \int dt, \quad \text{dvs.} \quad -y^{-1/2} = t + c$$

Så lösningen är av formen  $y(t) = 1/(\pm t + c)^2$  (beroende på hur vi gör med minustecknet framför  $-y^{-1/2}$  (det är alltid vanskligt med rationella potenser). Begynnelsevärdet ger  $c = \pm 2$ , så vi har två tänkbara kandidater  $y(t) = 1/(t-2)^2$  och  $y(t) = 1/(t+2)^2$ . Vi kontrollerar genom att derivera och utnyttjar att  $t = 0$  initialt varför vi är intresserade av  $t$  i en högeromgivning av nollan ( $0 < t < 2$ ):

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{(t \pm 2)^2} = \frac{-2}{(t \pm 2)^3} \quad \text{och} \quad 2 \left[ \frac{1}{(t \pm 2)^2} \right]^{3/2} = \frac{2}{|t \pm 2|^3} = \frac{2}{(2 \pm t)^3}$$

Så lösningen är  $y(t) = 1/(t-2)^2$  som har en singularitet för  $t = 2$  (det är därför lösaren klagar).

**12:** Idé: approximera  $y''(t)$  med  $(y'(t) - y'(t-h))/h$ , så

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{y'(t) - y'(t-h)}{h} =$$

$$y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h}{2}(f(t, y(t)) - f(t-h, y(t-h))) = y(t) + \frac{h}{2}(3f(t, y(t)) - f(t-h, y(t-h)))$$

Detta leder till metoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})]$$

vilket var den andra ordningens flerstegsmetod vi såg under föreläsningen. En annan tänkbar approximation är t.ex.

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{y'(t+h) - y'(t)}{h} =$$

$$y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h}{2}(f(t+h, y(t+h)) - f(t, y(t))) = y(t) + \frac{h}{2}(f(t+h, y(t+h)) + f(t, y(t)))$$

Detta leder till den implicita flerstegsmetoden:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)]$$