Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2016-06-03

1.

- a)
  - 1) $100^{200} = \text{Inf}$, då $100^{200} \cdot \text{e}^2 = \text{Inf}$.
  - 2) $-1/0 = -\text{Inf}$, $\cos(-\text{Inf})$ blir NaN, och sin blir NaN.
- b) Vi kan skriva talet 8 som $8 = +1 \cdot 2^3$. Vi ser nu att vi behöver bara skriva exponenten 3 så här: $3 + 1023 = 3 + (2^{10} - 1) = 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Vi får följande binär representation för 8:

  $$|0|10000000010|00000....0|$$

  där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar kodas som 10000000010 och mantissa kodas som 52 nollor.
- c) Choleskyfaktorisering för positivt definit A är $A = L \cdot L^T$, var

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = L \cdot L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix}.$$

  Vi multiplicerar $L \cdot L^T$ och får

  $$L \cdot L^T = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11} \cdot l_{21} \\ l_{21} \cdot l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

  Nu vi jämför elementerna i A med elementerna i $L \cdot L^T$: $a_{11} = l_{11}^2, a_{12} = l_{11} \cdot l_{21}, a_{21} = l_{21} \cdot l_{11}, a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$. Vi kan hitta $l_{11} = \sqrt{a_{11}}, l_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}, l_{22} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}$
- d) Låt x är exakta värdet och $\tilde{x}$ är approximation. Absoluta felet är: $x - \tilde{x}$, relativt felet $\frac{x - \tilde{x}}{x}$ om $x \neq 0$.
- e) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.

2. Vi inför vektorn $x = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x^k) + \cos f(x^k) - 10 \\ (x_1^k)^2 + x_2^k - f(x^k)^2 \end{bmatrix},$$

var

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(x^k) - \sin f(x^k) \cdot f'_{x_1}(x^k) & f'_{x_2}(x^k) - \sin f(x^k) \cdot f'_{x_2}(x^k) \\ 2x_1^k - 2f(x^k) \cdot f'_{x_1}(x^k) & 1 - 2f(x^k) \cdot f'_{x_2}(x^k) \end{bmatrix}.$$

Här, $f'_{x_2}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x^k), f'_{x_1}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x^k)$.

3. Ansätt $p(x) = ax + b$ vilket ger följande linjära ekvationssystem för obekanta a, b:

$$ax_1 + b = p(x_1),$$
$$ax_2 + b = p(x_2).$$

Eftersom $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2$ vi kan skriva systemet som

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1, \\ ax_2 + b &= y_2, \end{aligned}$$

från vilken vi kan hitta a, b:

$$\begin{aligned} b &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}, \\ a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Vi sätter (a, b) in i $p(x) = ax + b$ och får det linjära interpolationspolynomet:

$$p(x) = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

4. a) Notera trippelrotten i $(x-1)^3 = 0$ varför Newtons metod kan skrivas som

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k - 1)^3}{3(x^k - 1)^2} = \frac{2x^k + 1}{3}.$$

För att bevisa linjär konvergens (pga rotten $x = 1$) vi skriver:

$$x^{k+1} - 1 = \frac{2x^k + 1}{3} - 1 = \frac{2x^k - 2}{3} = \frac{2}{3}(x^k - 1).$$

Vi observerar att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{k+1} - 1|}{|x^k - 1|} = \frac{2}{3}.$$

Så metoden är linjärt konvergent med felkonstant $\frac{2}{3}$.

b) Trapetsmetoden för $\int_0^1 f(x)dx$ är:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) \cdot (1 - 0).$$

I vårt fall vi har $f(x) = x^2$, då trapetsmetoden för $\int_0^1 x^2dx$ ger oss:

$$\int_0^1 x^2dx \approx \frac{1}{2}(1^2 + 0^2) = \frac{1}{2}.$$

5. a) Se föreläsningsanteckningarna, s. 262: Vi skriver $y'(t) \approx \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}$, och explicit Euler's metod är:

$$y^{k+1} = y^k + \tau\lambda y^k, \tag{0.1}$$

och första iteration i den ska vara:

$$y^1 = y^0 + \tau\lambda y^0 = y_0(1 + \tau\lambda). \tag{0.2}$$

b) För konvergensen kräver vi att

$$|1 + \tau\lambda| < 1$$

eller

$$-1 < 1 + \tau\lambda < 1$$

Om $\lambda < 0$ vi har

$$0 < \tau|\lambda| < 2.$$

6. Logaritmera:

$$\ln R = p \ln 10 + T \cdot \frac{p}{q} + rT^2.$$

Inför $x_1 = p, x_2 = p/q, x_3 = r$. Samla all termer med parametrarna på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$x_1 \ln 10 + x_2 \cdot T + x_3 \cdot T^2 = \ln R.$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ i minsta kvadrat problem $\min_x \|Ax - b\|_2$, var raderna i A innehåller

$$[\ln 10, T_k, T_k^2], \quad k = 1, ..., m.$$

och vector b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 \\ \ln R_2 \\ ... \\ \ln R_k \\ ... \\ \ln R_m \end{bmatrix}, k = 1, ..., m.$$

Efter att vi har löst $\min_x \|Ax - b\|_2$ sätter vi $p = x_1, q = p/x_2, r = x_3$.