Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys MMG410, GU 2016-08-16

1.

- a)
  - 1) $1/0 = \text{Inf}$, då $1/0 + 1/0 = \text{Inf}$ och $\tan(1/0 + 1/0) = \text{NaN}$.
  - 2) $-1/0 = -\text{Inf}$, $\cos(-\text{Inf})$ blir NaN, och tan blir NaN.
- b) Vi kan skriva talet 16 som $16 = +1 \cdot 2^4$. Vi ser nu att vi behöver bara skriva exponenten 4 så här: $4 + 1023 = 4 + (2^{10} - 1) = 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Vi får följande binär representation för 16:

$$|0|10000000011|00000....0|$$

  där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar koderas som 10000000011 och mantissa koderas som 52 nollor.
- c) Konditionstal $k(A)$ i maxnorm (∞-norm) är: $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Eftersom A^{-1} ser ut som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  $\delta > 0$, blir $k(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (1+\delta)^2$ eftersom $\|A\|_\infty = \max_r \sum_{k=1}^{n} |a_{r,k}|$ är största radsumman.
- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.

2. Vi inför vektorn $x = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x^k)^3 + \sin f(x^k) - 1 \\ 5f(x^k) + (x_1^k)^3 + x_2^k - f(x^k)^3 \end{bmatrix},$$

var

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} 3f(x^k)^2 f'_{x_1}(x^k) + \cos f(x^k) \cdot f'_{x_1}(x^k) & 3f(x^k)^2 f'_{x_2}(x^k) + \cos f(x^k) \cdot f'_{x_2}(x^k) \\ 5f'_{x_1}(x^k) + 3(x_1^k)^2 - 3(f(x^k))^2 \cdot f'_{x_1}(x^k) & 5f'_{x_2}(x^k) + 1 - 3(f(x^k))^2 \cdot f'_{x_2}(x^k) \end{bmatrix}.$$

Här, $f'_{x_2}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x^k)$, $f'_{x_1}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x^k)$.

3.

Interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2).$$

För $t = t_1$ har vi:

$$p(t_1) = x_1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_2$ har vi:

$$p(t_2) = x_1 + x_2 \cdot (t_2 - t_1) + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_3$ har vi:

$$p(t_3) = x_1 + x_2 \cdot (t_3 - t_1) + x_3 \cdot (t_3 - t_1)(t_3 - t_2).$$

Vi får följande undertriangulära ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_1) \\ p(t_2) \\ p(t_3) \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

Om vi vill interpolera i punkterna $(1,5),(2,4),(3,7)$, är $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, p(t_1) = 5, p(t_2) = 4, p(t_3) = 7$ och systemet (0.1) skrivs:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

Vi löser systemet (0.2) och får: $x_1 = 5, x_1 + x_2 = 4$ och $x_2 = -1$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7$ och $x_3 = 2$, då interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ blir:

$$p(t) = 5 - (t-1) + 2(t-1)(t-2) = 2t^2 - 7t + 10.$$

4. a) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, ..., m$ för maximalt m. Vi beräknar först

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 = 1/(k+1).$$

Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} 1 &= w_1 + w_2, k = 0, \\ 1/2 &= w_1 x_1 + w_2 x_2, k = 1, \\ 1/3 &= w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, k = 2, \\ 1/4 &= w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3, k = 3, \\ 1/5 &= w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4, k = 4. \end{aligned}$$

Första ekvationen ger $w_{1,2} = 1/2$. Lös ut för $k = 1, 2$ ekvationen $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$ (vi noterar, att $x_1 < x_2$) för att få $x_1 = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2}$. Vi kollar nu fall $k = 3$. Utnyttjar vi binomialsatsen ser vi att $(1+c)^3 + (1-c)^3 = 2(1 + 3c^2)$ så att $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = (1/2^4) \cdot 2(1 + 3/3) = 1/4$, vilket är lika med det exakta värdet. Stämmer det för k = 4? Inte. Så, det polynomiella gradtalet är 3.

b)

Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall vi har $f(x) = 4x^3$, då rektangelmetoden för $\int_0^1 4x^3 dx$ ger oss:

$$\int_0^1 4x^3 dx \approx (1-0) f\left(\frac{1+0}{2}\right) = f(1/2) = 4 \cdot (1/2)^3 = 1/2.$$

5. a) Se föreläsningsanteckningarna, s. 263. Implicit, eller Bakåt-Euler metod är: $y^{k+1} = y^k + \tau f(t^{k+1}, y^{k+1})$ för diskretiseringen $y'(t) \approx \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}$.

Implicit Euler's metod för vårt problem är:

$$y^{k+1} = y^k + \tau\lambda y^{k+1},$$

eller

$$y^{k+1} - \tau\lambda y^{k+1} = y^k,$$

då har vi

$$y^{k+1} = \frac{y^k}{1-\tau\lambda}.$$

Första iteration i den för $k = 0$ ska vara:

$$y^1 = \frac{y^0}{1-\tau\lambda}.$$

b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 262, 263.

6. Logaritmera:

$$\ln R = \frac{p_1 + p_2 T}{1 + p_3 T}.$$

Samla all termer med parametrarna på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$p_1 + p_2 T - p_3 T \ln R = \ln R.$$

Konstruera matris A för att hitta $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ i minsta kvadrat problem $\min_p \|Ap - b\|_2$, var raderna i A innehåller

$$[1, T_k, -T_k \ln R_k], \quad k = 1, ..., m.$$

och vector b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 \\ \ln R_2 \\ ... \\ \ln R_k \\ ... \\ \ln R_m \end{bmatrix}, k = 1, ..., m.$$