Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2016-04-06

1.

- a)
  - 1) $100^{200} = \text{Inf}$, då $\log 10(100^{200}) = \text{Inf}$. Sedan $\log 10(100^{200}) - 200 * \log 10(100) = \text{Inf}$.
  - 2) $-1/0 = -\text{Inf}$, $\sin(-\text{Inf})$ blir NaN, och cos blir NaN.
- b) En positivt definit matris har positiva diagonalelement, vilket betyder att $\alpha > 0$ är nödvändigt. Vi kan då bryta ut α eftersom det räcker att undersöka om $\frac{A}{\alpha}$ är pos. def. Choleskyfaktoriseringen (om den existerar) av $\frac{A}{\alpha}$ blir

$$\frac{A}{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 + \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 3} \end{bmatrix}$$

  För existens kräver vi att $\alpha > 0$ och $\frac{1}{\alpha} - 3 > 0$ dvs $0 < \alpha < 1/3$.
- c) Vi testar tre normvillkoren:
  - $||x||_1 = \sum_k |x_k| > 0$ om $x \neq 0$ eftersom minst ett $x_k \neq 0$.
  - För $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha x\|_1 = \sum_k |\alpha x_k| = \alpha \|x\|_1$.
  - $\|x + y\|_1 = \sum_k |x_k + y_k| \leq \sum_k |x_k| + \sum_k |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
- d) Vi skriver Newtons metod så:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

och definerar $g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ och då $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Låt x^* var en exakt lösning för $f(x^*) = 0$. D{aa kräver vi för konvergens av Newtons metod att $|g'(x^*)| = 0$ och $|g'(x)| < 1$, var

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Vi måste också ha att x_0 ligger tillräkligt nära x^*.

2. Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} a + \mathrm{e}^b + \sin c - 1 = 0, \\ a + b\mathrm{e}^b + c \cos c - 1.23 = 0, \\ 2a + \mathrm{e}^{2b} + \sin(2c) - 0.75 = 0, \end{aligned}$$

och Newtons metod skrivs p{aa följande vis:

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & e^{b_k} & \cos c_k \\ 1 & (1 + b_k)e^{b_k} & \cos c_k - c_k \sin c_k \\ 2 & 2e^{2b_k} & 2\cos(2c_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_k + e^{b_k} + \sin c_k - 1 \\ a_k + b_k e^{b_k} + c_k \cos c_k - 1.23 \\ 2a_k + e^{2b_k} + \sin 2c_k - 0.75 \end{bmatrix}.$$

3.

Interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2).$$

För $t = t_1$ har vi:

$$p(t_1) = x_1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_2$ har vi:

$$p(t_2) = x_1 + x_2 \cdot (t_2 - t_1) + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_3$ har vi:

$$p(t_3) = x_1 + x_2 \cdot (t_3 - t_1) + x_3 \cdot (t_3 - t_1)(t_3 - t_2).$$

Vi får följande undertriangulära ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_1) \\ p(t_2) \\ p(t_3) \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

Om vi vill interpolera i punkterna $(-1, 1), (0, 3), (2, 9)$, är $t_1 = -1, t_2 = 0, t_3 = 2$ och systemet (0.1) skrivs:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

Vi löser systemet (0.2) och får: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1/3$, då interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ blir:

$$p(t) = 1 + 2(t + 1) + \frac{1}{3}(t + 1)t.$$

4.

- a) Newtons metod lyder

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2x_k + 1}{2x_k - 2} = \frac{x_k + 1}{2}$$

  Ekvationen har dubbelroten 1. Vi får:

$$x_{k+1} - 1 = \frac{x_k + 1}{2} - 1 = \frac{x_k - 1}{2}$$

  och

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - 1|}{|x_k - 1|} = \frac{1}{2}.$$

  Vi ser att metoden endast är linjärt konvergent (pga dubbelroten) med asymptotisk felkonstant $1/2$.
- b) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, ..., m$ för maximalt m. Vi beräknar först

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 = 1/(k + 1).$$

  Ekvationerna blir:

$$1 = w_1 + w_2, k = 0,$$
$$1/2 = w_1 x_1 + w_2 x_2, k = 1,$$
$$1/3 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, k = 2,$$
$$1/4 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3, k = 3,$$
$$1/5 = w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4, k = 4.$$

Första ekvationen ger $w_{1,2} = 1/2$. Lös ut för $k = 1, 2$ ekvationen $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$ (vi noterar, att $x_1 < x_2$) för att få $x_1 = \frac{1-1/\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1+1/\sqrt{3}}{2}$. Vi kollar nu fall $k = 3$. Utnyttjar vi binomialsatsen ser vi att $(1+c)^3 + (1-c)^3 = 2(1+3c^2)$ så att $w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = (1/2^4) \cdot 2(1 + 3/3) = 1/4$, vilket är lika med det exakta värdet. Stämmer det för k = 4? Inte. Så, det polynomiella gradtalet är 3.

5.
Eulers metod ger, som vanligt, approximationerna $y_0, y_1, y_2, ...$
Den exakta lösningen som går genom (t_{k1}, y_{k1}) betecknar vi med $z(t)$, och den löser följande problem:

$$z' = \lambda z, z(t_{k-1}) = y_{k-1}$$

och exakta lösningen blir:

$$z(t) = e^{\lambda(t-t_{k-1})}y_{k-1}.$$

För $t = t_k$ vi har:

$$z(t_k) = e^{\lambda(t_k-t_{k-1})}y_{k-1} = e^{\lambda h}y_{k-1}.$$

Eulers metod ger:

$$y_k = y_{k-1} + h\lambda y_{k-1} = (1+\lambda h)y_{k-1}.$$

Det lokala felet blir:

$$y_k - z(t_k) = (1+\lambda h)y_{k-1} - e^{\lambda h}y_{k-1} = \Big[1+\lambda h - \Big[1+\lambda h+(\lambda h)^2/2+...\Big]\Big]y_{k-1} = -\Big[(\lambda h)^2/2+...\Big]y_{k-1}$$

som är $O(h^2)$, och Eulers metod har ordning ett.

6. Logaritmera och multiplicera upp nämnaren:

$$\log R = (p_1 + p_2T)/(1 + p_3T), (1 + p_3T)\log R = p_1 + p_2T$$

Samla all termer med parametrarna på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$p_1 + p_2T - p_3T\log R = \log R.$$

Konstruera matris A för att hitta $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ i minsta kvadrat problem $\min_p \|Ap - b\|_2$, var raderna i A innehåller

$$[1, T_k, -T_k \log R_k], \quad k = 1, ..., m.$$

och vector b ska vara

$$\begin{bmatrix} \log R_1 \\ \log R_2 \\ ... \\ \log R_k \\ ... \\ \log R_m \end{bmatrix}, k = 1, ..., m.$$