

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
MMG410, GU
2017-01-02

1.

- a)
 - 1) $\exp(\log(10000)) = 10000$, $\log(\exp(10000)) = \text{Inf}$ och $\exp(\log(10000)) - \log(\exp(10000)) = -\text{Inf}$
 - 2) $\exp(\log(10)) = 10$, $\log(\exp(10)) = 10$ och $\exp(\log(10000)) - \log(\exp(10000)) = 0$.
- b) Vi kan skriva talet 32 som $32 = +1 \cdot 2^5$. Vi ser nu att vi behöver bara skriva exponenten 5 så här: $5 + 1023 = 5 + (2^{10} - 1) = 4 + 2^{10} = 2^{10} + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Vi får följande binär representation för 32:

$$|0|10000000100|00000\dots0|$$

där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar koderas som 10000000100 och mantissa koderas som 52 nollor.

- c) Konditionstal $k(A)$ i ett-norm är: $k(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$. Eftersom A^{-1} ser ut som

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix},$$

, blir $k(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 10 \cdot 0.2 = 2$ eftersom $\|A\|_1 = \max(|5| + |0|, |0| + |10|) = 10$, $\|A^{-1}\|_1 = \max(|1/5| + |0|, |0| + |1/10|) = 0.2$.

- d) Se föreläsninganteckningarna, s. 174. Fixpunktsiterationsmetod för $g(x) = \frac{x^2 - 5}{3} + x$ är:

$$x^{k+1} = g(x^k).$$

För exakt x^* :

$$x^* = g(x^*),$$

eller

$$g(x^*) - x^* = 0,$$

det betyder att

$$\left(\frac{(x^*)^2 - 5}{3} + x^* \right) - x^* = 0,$$

$$\frac{(x^*)^2 - 5}{3} = 0.$$

$$(x^*)^2 - 5 = 0,$$

Fixpunkter:

$$x_1^* = \sqrt{5}, x_2^* = -\sqrt{5}.$$

Konvergens:

$$g'(x) = \left(\frac{x^2 - 5}{3} + x\right)' = \frac{2x}{3} + 1,$$

$$g'(x_1^*) = \left(\frac{(x_1^*)^2 - 5}{3} + x_1^*\right)' = \frac{2x_1^*}{3} + 1 = \frac{2\sqrt{5}}{3} + 1 \approx 2.4907,$$

$$g'(x_2^*) = \left(\frac{(x_2^*)^2 - 5}{3} + x_2^*\right)' = \frac{2x_2^*}{3} + 1 = -\frac{2\sqrt{5}}{3} + 1 \approx -0.4907.$$

$|g'(x_1^*)| = |g'(\sqrt{5})| \approx 2.4907 > 1$ - divergens, $|g'(x_2^*)| = |g'(-\sqrt{5})| \approx 0.4907 < 1$ - konvergens.

2. Vi inför vektorn $x = [x_1, x_2]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(x_1, x_2)$. Newtons metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x^k)^3 + \sin f(x^k) - 1 \\ 5f(x^k) + (x_1^k)^3 + x_2^k - f(x^k)^3 \end{bmatrix},$$

var

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} 3f(x^k)^2 f'_{x_1}(x^k) + \cos f(x^k) \cdot f'_{x_1}(x^k) & 3f(x^k)^2 f'_{x_2}(x^k) + \cos f(x^k) \cdot f'_{x_2}(x^k) \\ 5f'_{x_1}(x^k) + 3(x_1^k)^2 - 3(f(x^k))^2 \cdot f'_{x_1}(x^k) & 5f'_{x_2}(x^k) + 1 - 3(f(x^k))^2 \cdot f'_{x_2}(x^k) \end{bmatrix}.$$

Här, $f'_{x_2}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x^k)$, $f'_{x_1}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x^k)$.

3.

Interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2).$$

För $t = t_1$ har vi:

$$p(t_1) = x_1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_2$ har vi:

$$p(t_2) = x_1 + x_2 \cdot (t_2 - t_1) + x_3 \cdot 0.$$

För $t = t_3$ har vi:

$$p(t_3) = x_1 + x_2 \cdot (t_3 - t_1) + x_3 \cdot (t_3 - t_1)(t_3 - t_2).$$

Vi får följande undertriangulära ekvationssystemet:

$$(0.1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_1) \\ p(t_2) \\ p(t_3) \end{bmatrix}.$$

Om vi vill interpolera i punkterna $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 7)$, är $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, p(t_1) = 5, p(t_2) = 4, p(t_3) = 7$ och systemet (0.1) skrivs:

$$(0.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systemet (0.2) och får: $x_1 = 5, x_1 + x_2 = 4$ och $x_2 = -1, x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7$ och $x_3 = 2$, då interpolationspolynomet på Newtons form för $n = 3$ blir:

$$p(t) = 5 - (t - 1) + 2(t - 1)(t - 2) = 2t^2 - 7t + 10.$$

4. a) Formeln skall vara exakt för polynom $x^k, k = 0, 1, \dots, m$ för maximalt m . Vi beräknar först

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = 1/(k+1).$$

Ekvationerna blir:

$$\begin{aligned} 1 &= w_1 + w_2, k = 0, \\ 1/2 &= w_1 x_1 + w_2 x_2, k = 1, \\ 1/3 &= w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2, k = 2, \\ 1/4 &= w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3, k = 3, \\ 1/5 &= w_1 x_1^4 + w_2 x_2^4, k = 4. \end{aligned}$$

Första ekvationen ger $w_{1,2} = 1/2$. Lös ut för $k = 1, 2$ ekvationen $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$ (vi noterar, att $x_1 < x_2$) för att få $x_1 = \frac{1-1/\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1+1/\sqrt{3}}{2}$. Vi kollar nu fall $k = 3$. Utnyttjar vi binomialsatsen ser vi att $(1+c)^3 + (1-c)^3 = 2(1+3c^2)$ så att $w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = (1/2^4) \cdot 2(1+3/3) = 1/4$, vilket är lika med det exakta värdet. Stämmer det för $k = 4$? Inte. Så, det polynomiella gradtalet är 3.

b)

Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x) dx$ är:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall vi har $f(x) = 4x^3$, då rektangelmetoden för $\int_0^1 4x^3 dx$ ger oss:

$$\int_0^1 4x^3 dx \approx (1-0) f\left(\frac{1+0}{2}\right) = f(1/2) = 4 \cdot (1/2)^3 = 1/2.$$

5. a) Se föreläsningssanteckningarna, s. 263. Implicit, eller Bakåt-Euler metod är: $y^{k+1} = y^k + \tau f(t^{k+1}, y^{k+1})$ för diskretiseringen $y'(t) \approx \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau}$.

Implicit Euler's metod för vårt problem är:

$$y^{k+1} = y^k + \tau \lambda y^{k+1},$$

eller

$$y^{k+1} - \tau \lambda y^{k+1} = y^k,$$

då har vi

$$y^{k+1} = \frac{y^k}{1 - \tau \lambda}.$$

Första iteration i den för $k = 0$ ska vara:

$$y^1 = \frac{y^0}{1 - \tau \lambda}.$$

b) Se föreläsningssanteckningarna, s. 262, 263.

6. Logaritmera:

$$\ln R = \ln(5^{p_1} e^{(p_2 T + p_3 T^2 + p_4 T^3)}).$$

Samla all termer med parametrarna på vänster sida och termer med kända värdena - på höger sida:

$$p_1 \ln 5 + p_2 T + p_3 T^2 + p_4 T^3 = \ln R.$$

Konstruera matris A för att hitta $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$ i minsta kvadrat problem $\min_p \|Ap - b\|_2$, var raderna i A innehåller

$$[\ln 5, T_k, T_k^2, T_k^3], \quad k = 1, \dots, m.$$

och vector b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 \\ \ln R_2 \\ \dots \\ \ln R_k \\ \dots \\ \ln R_m \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, m.$$