Numerisk Analys, MMG410. Lecture 10.

Hur skall vi karakterisera de olika konvergenshastigheterna för halvering, sekant och Newton?

$$\text{Om } f(x^*) = 0 \text{ och } \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^r} = C \text{ konstant } < \infty$$

så säger vi att metoden har konvergensordning r.

- om $r = 1$ och $C < 1$ så har vi linjär konvergens
- om $r > 1$ så har vi superlinjär konvergens
- om $r = 2$ så har vi kvadratisk konvergens

Vad innebär $r = 1$? Om x_0 ligger tillräckligt nära x^* så gäller att:

$$|x_1 - x^*| \approx C|x_0 - x^*|, \; |x_2 - x^*| \approx C|x_1 - x^*| \approx C^2|x_0 - x^*|$$

Dvs. $|x_k - x^*| \approx C^k|x_0 - x^*|$.

Ickelinjära ekvationer (Konvergensordning)

Exempel

$|x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^r$. Antag att $|x_0 - x^*| = 0.1$ och $C = 0.1$, då är $|x_k - x^*|$:

k	linjar r = 1	superlinjar r = 1.618	kvadratisk r = 2
0	1e-1	1e-1	1e-1
1	1e-2	2e-3	1e-3
2	1e-3	6e-6	1e-7
3	1e-4	3e-10	1e-15
4	1e-5	5e-17	1e-31

Normalt (nära lösningen för sekant och Newton) är:

- Halveringsmetoden linjär med $C = 0.5$.
- Sekantmetoden superlinjär med $r = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$
- Newtons metod kvadratisk konvergent (om enkelrot)

Ickelinjära ekvationer (Konvergensordning)

Exempel: lös med Newtons metod och halveringsmetoden

$$x^{10} - a = 0, \;\; a = 10^{10}$$

Använd det urusla startvärdet a ($[0, a]$ för halveringsmetoden).
Uruselt eftersom $x^* = 10$.
Newtoniterationen blir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{10} - a}{10x_k^9} = \frac{9}{10}x_k + \frac{a}{10x_k^9} \approx \frac{9}{10}x_k$$

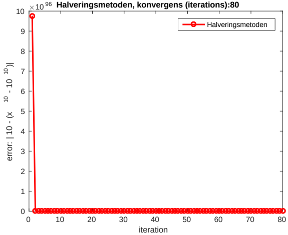
för stora x_k, så att

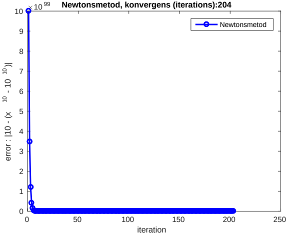
$$|x_{k+1} - x^*| \approx |x_{k+1}| \approx |\frac{9}{10}x_k| \approx \frac{9}{10}|x_k - x^*|$$

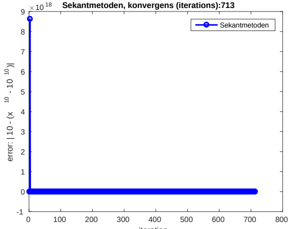
dvs. vi får linjär konvergens med $C = \frac{9}{10}$.

Example: halveringsmetoden, sekantmetoden och Newton's metod för $f(x) = x^{10} - 10^{10} = 0$

Startvärde i Newton's metod: $x(1) = 10^{10}$, tolerance = 10e-15. För halveringsmetoden: $[n, p] = [0, 10^{10}]$. Startvärde i Sekantmetod: $x(1) = 5.0, x(2) = 7$.







Ickelinjära ekvationer (Konvergensordning)

Konvergensordningen är definierad som ett gränsvärde. Det kan krävas många steg innan x_k ligger så nära x^* att den kvadratiska konvergensen sätter igång. Om den kommer igång. "Snabba men osäkra".

Hybridmetoder: Använd "dyra" Newton där det lönar sig och en billig metod för övrigt.

Vilken metod är billigare? Newton eller sekant?

Sekantmetoden kräver ett funktionsvärde i varje steg. Newton kräver både ett funktionsvärde och en derivata men konvergerar snabbare (nära nollstället).
Vi är normalt inte intresserade av att minimera antalet iterationer. Det viktiga är den totala körtiden och minnesbehovet.

- få komplexa iterationer
- många enkla iterationer

Givet approximationen $\hat{x}$ och det exakta värdet x^*, hur ska vi uppskatta $|\hat{x} - x^*|$? Det vi kan beräkna är residualen $f(\hat{x})$. Medelvärdessatsen:

$$f(\hat{x}) = f(x^*) + (\hat{x} - x^*)f'(\xi),\ \xi \in (\hat{x}, x^*)$$

Antag att $f'(\xi)$ är kontinuerlig med $M = \min |f'(\xi)|,\ \xi \in [\hat{x}, x^*]$. Om då $M > 0$ gäller att $|\hat{x} - x^*| \leq |f(\hat{x})|/M$

M kan vara noll. Tag $f(x) = x^2$ (så nollan är dubbelrot). Då är både $f(0) = 0$ och $f'(0) = 0$. Nu ett exempel:

$$f(x) = 1/x - 1/10, \hat{x} = 11,\ f(\hat{x}) = 1/11 - 1/10 = -1/110,$$

$$|f'(\xi)| = 1/\xi^2,\ |\hat{x} - x^*| \leq \frac{|1/11 - 1/10|}{1/11^2} = 1.1$$

f är strängt avtagande med $f(9) > 0$ och $f(11) < 0$ varför $(9, 11)$ innehåller precis en rot. Beloppet av derivatan $1/x^2$ är strängt avtagande. Det minsta värdet på derivatan är $1/11^2$.

I praktiken är det svårt att beräkna M, så en vettig approximation är $f(\hat{x})/f'(\hat{x})$. I Newtons metod får vi denna approximation på köpet:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \Rightarrow x_j - x_{j+1} = \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Om $x^* \approx x_{j+1}$ så är $f(\hat{x})/f'(\hat{x})$ en uppskattning av felet i x_j. Nu ett exempel med föregående problem, $f(x) = 1/x - 1/10$. Newtons metod lyder

$$x_{j+1} = x_j - \frac{1/x_j - 1/10}{-1/x_j^2}$$

Ickelinjära ekvationer (Metodoberoende feluppskattningen)

```
x = 1;                     % bad
for j = 1:10
   f  = 1 / x(j) - 0.1;    % f
   fp = -1 / x(j)^2;       % f'
   q  = f / fp;

   x(j + 1) = x(j) - q;    % update
   e(j)     = x(j) - 10;   % error
   a(j)     = q;           % approx. of error
end
fprintf( ...
  '         x          error        approx err\n')
disp([x(1:end-1)', e', a'])       % print a table
```

x	error	approx err
1.0000e+00	-9.0000e+00	-9.0000e-01
1.9000e+00	-8.1000e+00	-1.5390e+00
3.4390e+00	-6.5610e+00	-2.2563e+00
5.6953e+00	-4.3047e+00	-2.4517e+00
8.1470e+00	-1.8530e+00	-1.5097e+00
9.6566e+00	-3.4337e-01	-3.3158e-01
9.9882e+00	-1.1790e-02	-1.1776e-02
1.0000e+01	-1.3901e-05	-1.3901e-05
1.0000e+01	-1.9323e-11	-1.9322e-11
1.0000e+01	-1.7764e-15	-1.3878e-15

Ickelinjära ekvationer (Avbrottskriterium)

I sekantmetoden får vi inte en sekvens av intervall som innerhåller roten. Metoden kan ju till och med divergera. så, hur vet vi när vi ska avsluta iterationen? Vi har ett avbrottskriterium som kontrollerar:

- k, för att undvika oändliga loopar (divergens, eller för små toleranser)
- $|x_k - x_{k-1}|$, borde gå mot noll vid konvergens, men litet värde man betyda att det går långsamt
- $|f(x_k)|$, noll i lösningen (tänk också på $|f(x_k)|/M$)

Första försöket: avsluta om ($|$ = eller):

$$k > maxit \;\mid\; |x_k - x_{k-1}| \leq tol_x \;\mid\; |f(x_k)| \leq tol_f$$

maxit (max antal iterationer), tol_x och tol_f ges av användaren. Man kan givetvis kräva att $|x_k - x_{k-1}| \leq tol_x \;\&\; |f(x_k)| \leq tol_f$.

Ickelinjära ekvationer (Avbrottskriterium)

Inte skalningsoberoende: $10^5 f(x) = 0$ borde helst fungera lika bra som $f(x) = 0$. Motsvarande för $f(10^5 x) = 0$. Toleranserna måste skalas efter problemet.

Andra försöket: avsluta om:

$$k > maxit \;\mid\; |x_k - x_{k-1}| \leq tol_x |x_0| \;\mid\; |f(x_k)| \leq tol_f |f(x_0)|$$

Fungerar inte om $x_0 = 0$. Vi skulle kanske kunna uppskatta derivatan för att få något i stil med $|\hat{x} - x^*| \leq |f(\hat{x})|/M$. Det är inte enkelt att utforma ett säkert och effektivt kriterium. Ett kriterium går alltid att lura eftersom vi endast känner till funktionen (och kanske derivatan) i ett ändligt antal punkter. Det finns oändligt många funktioner som går genom dessa punkter.

Ickelinjära ekvationer (Modifierad Newton)

Dyrt och komplicerat att beräkna $J(x)$. Alternativ? Modifierad Newton: Beräkna och LU-faktorisera $J(x^{(j)})$ då och då (inte i varje iteration).

Differensapproximation av J. Vi vill normalt inte beräkna de n^2 derivatorna explicit. Om f är given via en algoritm kanske det inte är möjligt att beräkna derivatorna. Välj ett lämpligt tal h (se övning):

$$f(x + he_i) \approx f(x) + hJe_i$$

eller

$$Je_i \approx \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

där e_i är kolonn i i enhetsmatrisen.

Fixpunkter och lite teori

Upprepade tryckningar på cos-knappen. Tre olika startvärden:

-5.0000e+00	0	2.0000e+01
2.8366e-01	1.0000e+00	5.0808e+01
9.6004e-01	5.4030e-01	9.1788e-01
5.7349e-01	8.5755e-01	6.0750e-01
8.4001e-01	6.5429e-01	8.2108e-01
6.6745e-01	7.9348e-01	6.8143e-01
7.8540e-01	7.0137e-01	7.7667e-01
7.0711e-01	7.6396e-01	7.1325e-01
7.6025e-01	7.2210e-01	7.5624e-01
7.2467e-01	7.5042e-01	7.2742e-01
7.4872e-01	7.3140e-01	7.4689e-01
7.3256e-01	7.4424e-01	7.3380e-01
7.4346e-01	7.3560e-01	7.4263e-01
7.3613e-01	7.4143e-01	7.3669e-01

Fixpunkter och lite teori

Så, i varje kolonn har vi $cos(cos(cos(cos(\ldots cos(x_0)\ldots))))$. Detta kan skrivas på formen $x_{k+1} = \cos x_k$

- Iterationen verkar konvergera
- Gör den det alltid?
- Hur snabbt konvergerar den?
- Kan vi använda detta till något?

Om vi konvergerar gäller, i vårt exempel, att $x = \cos x$ dvs. gränsvärdet är lösningen till en ekvation.

```
>> [x, cos(x), x - cos(x)]
ans = 7.3909e-01    7.3909e-01    0
```

Låt oss trycka på x^2 knappen istället. Vi noterar först att om $x_0 \leq 0$ så är alla efterföljande värden ickenegativa. Det räcker att studera ickenegativa värden med andra ord.

Fixpunkter och lite teori

Tre saker kan inträffa:

1. Om $0 \leq x_0 \leq 1$ så konvergerar värdena mot 0. T.ex. $0.1, 0.01, 0.0001, \ldots$
2. $x_0 = 1$ medför att vi stannar i ett.
3. $x_0 > 1$ medför att $x_k \to \infty$.

Punkten ett är "repulsiv" i den mening att oavsett hur nära vi startar ett (om vi inte startar precis i ettan) så stöts vi därifrån. Nollan "attraherar". Om $|x_0| < 1$ så konvergerar följden mot noll.

Vi kommer att studera iterationer av typen $x_{k+1} = g(x_k)$ (inte enbart "knapptryckningsfunktioner") där g är kontinuerligt deriverbar. Om x_k konvergerar $x_k \to x^*$ gäller att $x^* = g(x^*)$. Vi kallar g en <u>fixpunktsiteration</u> och x^* en <u>fixpunkt</u>. Startar vi i en fixpunkt får vi tillbaka den.

Övningar

Sätt upp Newtons metod för följande problem:

1. $$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(y) &= 2, \\ \cos(x^2)y + \sin(y^2)x &= 3. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (\cos(x))^2 \sin(y) &= \sin(x^2), \\ (\sin(y))^2 \cos(x) &= \cos(y^2). \end{aligned}$$