Numerisk Analys, MMG410. Lecture 14.

Interpolation (Chebyshevpunkter)

De så kallande Chebyshevpunkterna har egenskapen att de gör det maximala värdet av $|(t - t_1)(t - t_2)...(t - t_n)|$ så litet som möjligt.

Sats

Om $t_k, t \in [-1, 1], \; k = 1, 2, ..., n$ *gäller det att*

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |(t - t_1)(t - t_2)...(t - t_n)|$$

minimeras då

$$t_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right], \; k = 1, 2, ..., n$$

Det maximala värdet på $|(t - t_1)(t - t_2)...(t - t_n)|$ *är då* $1/2^{n-1}$.

Interpolation (Chebyshevpunkter)

När t ligger i ett annat intervall, $[\alpha, \beta]$ säg, får vi göra en linjär avbilding av Chebyshevpunkterna till detta intervall. Vi ser att

$$\frac{\beta - \alpha}{2}[-1, 1] + \frac{\alpha + \beta}{2} = [\alpha, \beta]$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna blir

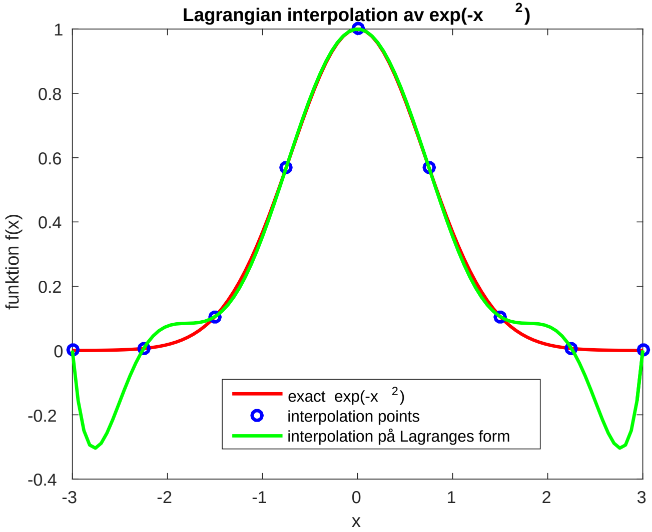
$$-\frac{\beta - \alpha}{2} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ibland är det ändå problem. Det kan tänkas att M, begränsningen av $|f^{(n)}(\theta)|$ ej existerar.

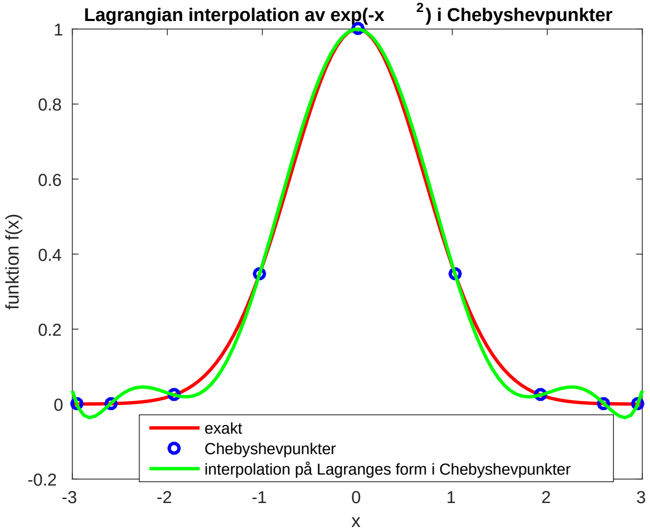
Example

$f(t) = \sqrt{t}$ på intervallet $[0, 3]$. Redan $f'(0)$ är ju obegränsad, man säger att derivatan har en singularitet. I vissa fall visar sig singulariteten först i högre derivator (t.ex. $f(t) = t^{5/2}$).

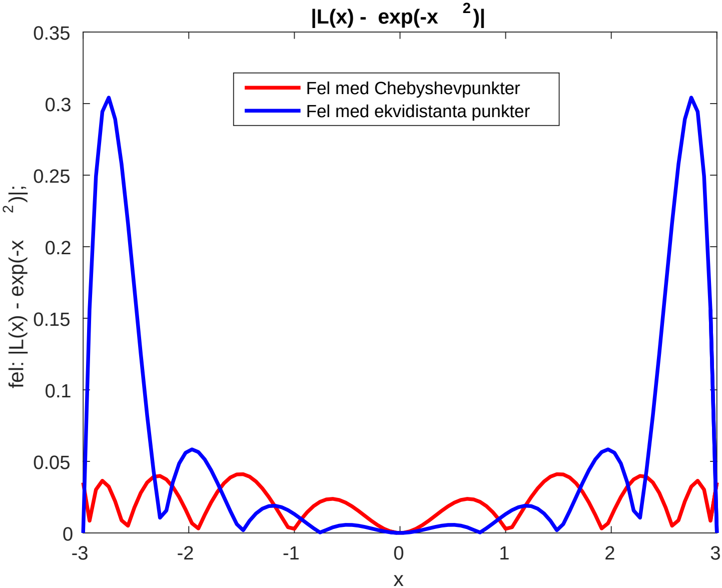
Lagrange interpolation i 9 ekvidistanta punkter för $f(x) = e^{-x^2}$



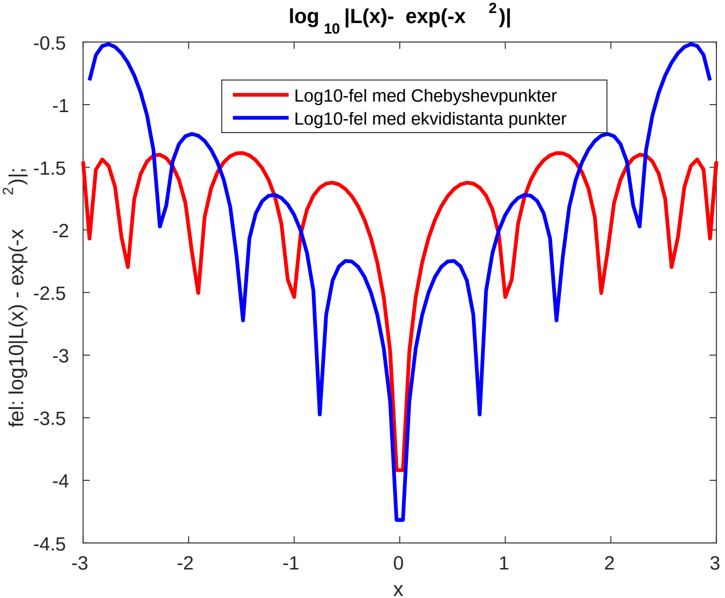
Interpolation i Lagrange form i 9 Chebyshevpunkter för $f(x) = e^{-x^2}$



Fel för $f(x) = e^{-x^2}$



Fel för $f(x) = e^{-x^2}$



Interpolation (Chebyshevpunkter)

Om en funktion har $n+1$ antal kontinuerliga derivator så kan den utvecklas i en Taylorutveckling:

$$f(t) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + R(t)$$

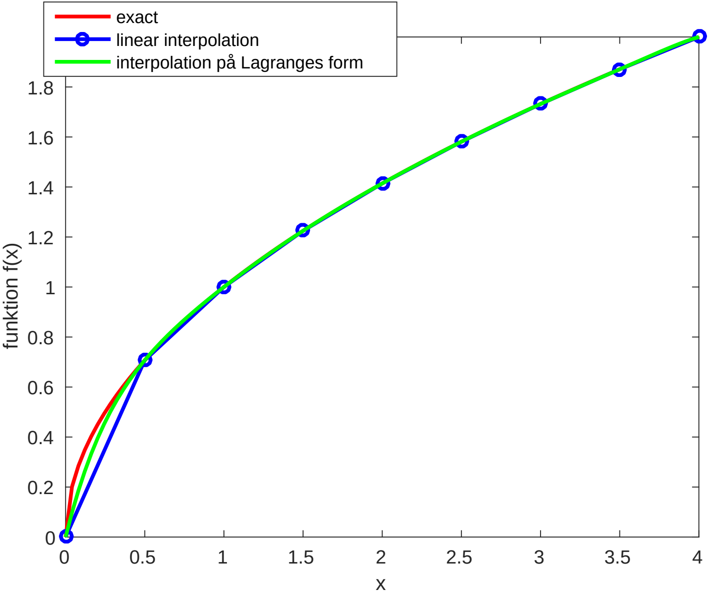
där resttermen $R(t) = c(\xi)(t-a)^{n+1}$, $\xi \in (a,t)$ och $|c(\xi)|$ är uppåt begränsad. Detta innebär att en sådan funktion (som har Taylorutveckling) liknar ett polynom på ett tillräckligt litet intervall.

Om inte alla $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$ kan vi göra $R(t)$ godtyckligt liten jämfört med resten av Taylorutveckningen, genom att ta $|t-a|$ tillräckligt litet. På ett stort intervall behöver inte funktionen likna ett polynom.

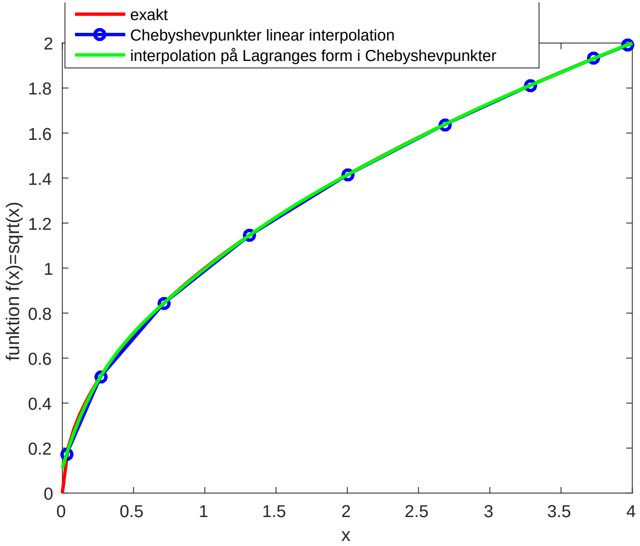
Example

$\sqrt{t}$ har ingen Taylorutveckling kring $a = 0$. Däremot har ju $\sqrt{t}$ en utveckling kring alla $a > 0$ och det är inga problem att approximera funktionen för positiva t.

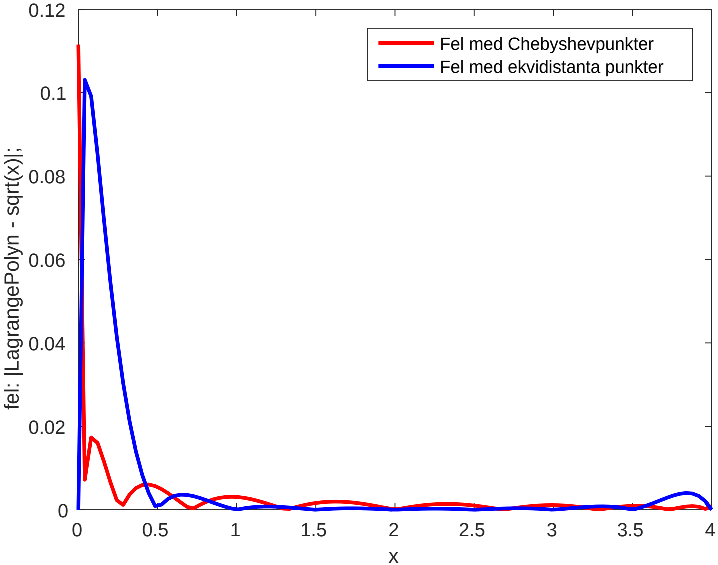
Interpolation i Lagrange form i 9 punkter för $f(x) = \sqrt{x}$



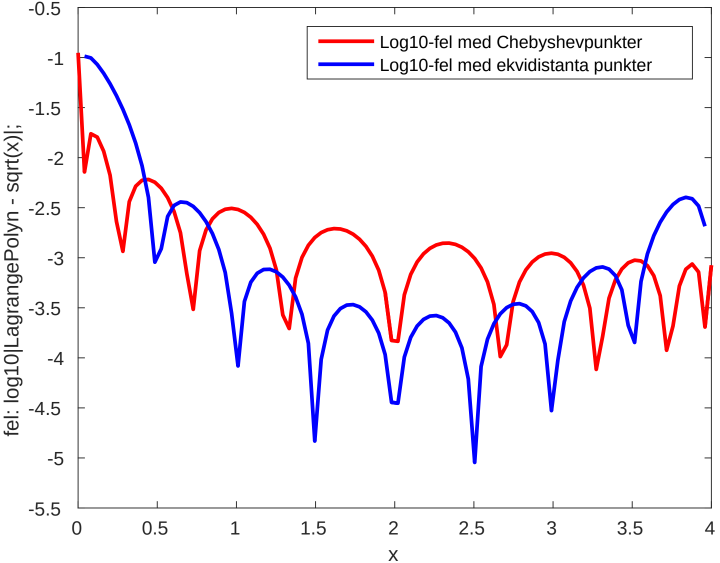
Interpolation i Lagrange form i 9 Chebyshevpunkter för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel av interpolation i Lagrange form för $f(x) = \sqrt{x}$



Fel av interpolation i Lagrange form för $f(x) = \sqrt{x}$



Övning

Vi bestämmer interpolationspolynomet, p_n, på $[0,1]$ som interpolerar e^t i punkterna $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$. Visa att oavsett hur vi väljer t_k-punkterna (i övrigt) så gäller:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} |e^t - p_n(t)| = 0.$$

Visa att om vi väljer Chebyshevpunkterna så gäller att:

$$\max_{0\le t\le 1} |e^t - p_n(t)| \le \frac{e}{n!2^{2n-1}}.$$

Svar: vi vet att

$$\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{f(t)}_{exakt} = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n)$$

där $\theta \in (t, t_1, t_2, ..., t_n)$. Vi vet att $(e^t)^{(n)} = e^t$ och $|t - t_k| \le 1$ då

$$\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{e^t}_{exakt} = \frac{e^t(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}.$$

Övning

$$\underbrace{p_n(t)}_{beräknad} - \underbrace{e^t}_{exakt} = \frac{e^t(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \leq \frac{e}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \leq \frac{e}{n!}.$$

Observera att det ger oss ett konvergensresultat för varje funktion vars alla derivator är begränsade på $[0, 1]$, så $|f^{(n)}(t)| \leq M, 0 \leq t \leq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq t\leq 1} |e^t - p_n(t)| = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n!} = 0.$$

Övning

Man kan få snabbare konvergens med Chebyshevpunkterna $c_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$, $k = 1, 2, ..., n$. Vi transformerar de:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\underbrace{[-1,1]}_{c_k}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\underbrace{[\alpha,\beta]}_{t_k}$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna blir

$$\frac{\beta-\alpha}{2}c_k+\frac{\alpha+\beta}{2}=t_k,$$

Vi har: $\alpha = 0, \beta = 1$: $1/2c_k + 1/2 = t_k$ och $c_k = 2t_k - 1$ då $t_k = \frac{c_k+1}{2}$.
Vi redan vet att

$$\underbrace{p_n(t)}_{\textit{beräknad}} - \underbrace{e^t}_{\textit{exakt}} = \frac{e^t(\theta)}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}(t-t_1)(t-t_2)...(t-t_n) \le \frac{e}{n!}.$$

Visa att om vi väljer Chebyshevpunkterna så gäller att:

$$\max_{0\le t\le 1}|e^t - p_n(t)| \le \frac{e}{n!2^{2n-1}}.$$

Övning

Man kan få snabbare konvergens med Chebyshevpunkterna $c_k = -\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]$, $k = 1, 2, ..., n$. Vi transformerar de:

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\underbrace{[-1,1]}_{c_k}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\underbrace{[\alpha,\beta]}_{t_k}$$

så de transformerade Chebyshevpunkterna blir

$$\frac{\beta-\alpha}{2}c_k+\frac{\alpha+\beta}{2}=t_k,$$

Vi har: $\alpha = 0, \beta = 1$: $1/2c_k + 1/2 = t_k$ och $c_k = 2t_k - 1$ då $t_k = \frac{c_k+1}{2}$.

$$\max_{0\le t\le 1}\prod_{k=1}^{n}|t-t_k| = \max_{0\le t\le 1}\prod_{k=1}^{n}\left|t-\frac{c_k+1}{2}\right| = \frac{1}{2^n}\max_{-1\le s\le 1}\prod_{k=1}^{n}|s-c_k| = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}|\underbrace{p_n(t)}_{beräknad}-\underbrace{e^t}_{exakt}| = \lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\frac{e}{n!2^{2n-1}} = 0.$$

Splinefunktioner

Polynom av höga gradtal är svårhanterliga men har samtidigt lokalt goda approximationsegenskaper och är enkla att beskriva, lagra, beräkna, integrera, derivera, etc. En vanlig kompromiss är styckvisa polynom av låga gradtal. Man behåller polynomens enkelhet men slipper svängningarna.

Definition

En interpolerande splinefunktion av grad j är en funktion som interpolerar (t_k, y_k), $k = 1, 2, ..., n$ och som består av styckvisa polynom på intervallen $[t_1, t_2], [t_2, t_3], ...$. Dessutom är splinefunktionen $j - 1$ gånger kontinuerligt deriverbar i knutpunkterna (dvs. i (t_k, y_k)).

Det är inga problem med kontinuiteten av derivatorna av varje enskilt polynom (i varje delinterval).

Splinefunktioner

- Om $j = 1$ så har vi ingen kontinuerlig derivata utan bara kontinuitet hos splinefunktionen.
  Delpolynomen har högst grad ett.
- Om $j = 2$ så är delpolynomen (högst) andragradspolynom. Splinefunktionen är kontinuerlig och är kontinuerligt deriverbar (förstaderivatan är kontinuerlig).
- Det vanligaste är dock $j = 3$, kubiska splines, där delpolynomen är kubiska (högst) och splinefunktionen är kontinuerlig liksom dess första- och andraderivator.

Låt oss se varför detta verkar möjligt att åstadkomma och varför man inte kan kräva kontinuerlig tredjederivata.

Splinefunktioner

Example

En kubisk spline kan skrivas $p_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$ på intervallet $[t_k, t_{k-1}]$. Antag att vi har n stycken t-värden. Detta ger $n-1$ intervall (lika många polynom), så antalet obestämda koefficienter är $4(n-1)$. Hur många villkor har vi?

Interpolationskravet ger $2(n-1)$ villkor (ty varje polynom måste interpolera 2 knutpunkter). Detta ger oss kontinuiteten gratis.

Kontinuerlig förstaderivata ger $n-2$ villkor (inre punkter) och lika många för andraderivatan. Så summa
$2(n-1) + n - 2 + n - 2 = 4n - 6$ villkor.

Det innebär att vi saknar två villkor som måste bestämmas på något sätt. Här är några vanliga tilläggsvillkor (s är splinefunktionen):

Splinefunktionern: kubisk spline

- $s''(t_1) = s''(t_n) = 0$ s.k. naturliga splines (minimerar $\int_{t_1}^{t_n} (s''(t))^2 dt$)
- $s'(t_1) = f'(t_1)$ och $s'(t_n) = f'(t_n)$ komplett spline
- $s'(t_1) = s'(t_n)$ samt $s''(t_1) = s''(t_n)$ periodisk första- och andraderivata (kanske rimligt med $y_1 = y_n$ i detta fall)
- $p_1(t) = p_2(t), \; t \in [t_1, t_3]$ och $p_{n-2}(t) = p_{n-1}(t), \; t \in [t_{n-2}, t_n]$, not-a-knot; medför att s''' kontinuerlig i $t = t_2$ och $t = t_{n-1}$. Det är alltså ett tredjegradspolynom i $[t_1, t_3]$ (och ett (annat) i $[t_{n-2}, t_n]$).

Kubisk spline för 3 punkter t_1, t_2, t_3

Example

En kubisk spline för 3 punkter t_1, t_2, t_3 kan skrivas som:

$$p_1(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3, \quad (1)$$

$$p_2(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 t^3. \quad (2)$$

Koefficienterna $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ ska bestämmas.
Interpolationskravet ger 4 villkor (ty varje polynom måste interpolera 2 knutpunkter). Detta ger oss kontinuiteten gratis. Kontinuerlig förstaderivata $p_1'(t), p_2'(t)$ ger 1 villkor (inre punkt) och lika många för andraderivatan.
Så vi har: $4 + 2 = 6$ villkor.

Example

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 \\ p_2(t) &= \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 t^3 \end{aligned}$$

1)

$$\begin{aligned} p_1(t_1) &= y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t_1 + \alpha_3 t_1^2 + \alpha_4 t_1^3 \\ p_1(t_2) &= y_2 = \alpha_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_2^2 + \alpha_4 t_2^3 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} p_2(t_2) &= y_2 = \beta_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_2^2 + \beta_4 t_2^3 \\ p_2(t_3) &= y_3 = \beta_1 + \beta_2 t_3 + \beta_3 t_3^2 + \beta_4 t_3^3 \end{aligned}$$

$p'_1(t_2) \in C \Longrightarrow p'_1(t_2) = p'_2(t_2)$

$$\begin{aligned} p'_1(t) &= \alpha_2 + 2\alpha_3 t + 3\alpha_4 t^2 \\ p'_2(t) &= \beta_2 + 2\beta_3 t + 3\beta_4 t^2 \end{aligned}$$

Example

3) $p'_1(t_2) = p'_2(t_2)$:

$$p'_1(t_2) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t_2 + 3\alpha_4 t_2^2 =$$
$$= \beta_2 + 2\beta_3 t_2 + 3\beta_4 t_2^2 = p'_2(t_2)$$

4) $p''_1(t_2) \in C \Longrightarrow p''_1(t_2) = p''_2(t_2)$

$$\begin{aligned} p''_2(t) &= 2\beta_3 + 6\beta_4 t \\ p''_1(t) &= 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t \end{aligned}$$

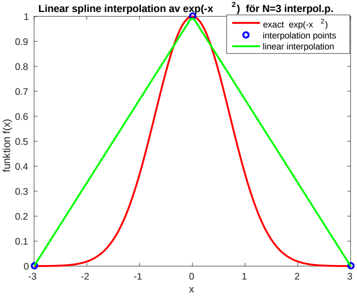
$$p''_2(t_2) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t_2 =$$
$$= 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t_2 = p''_1(t_2)$$

Notera, att vi har skrivit $4 + 2 = 6$ villkor, behöver 2 till (vi har 8 koefficienter, som ska bestämmas). Vi väljer följande 2 tillägsvillkor: $p''_1(t_1) = 0; p''_2(t_3) = 0$:

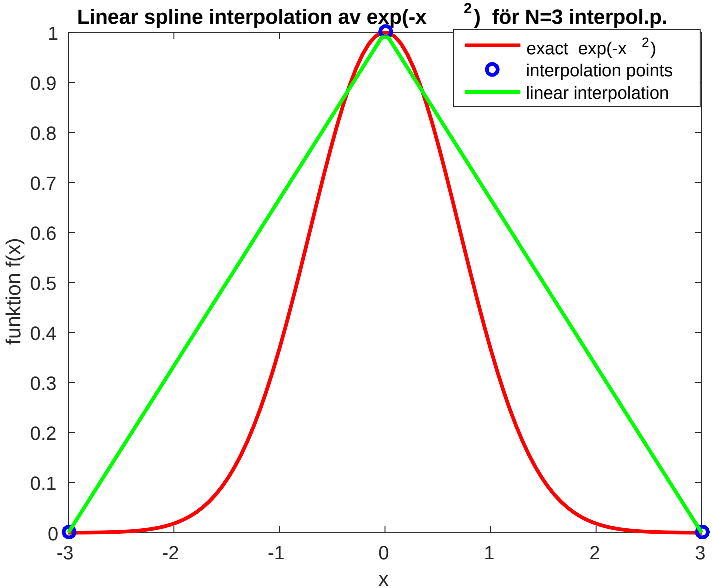
$$2\alpha_3 + 6\alpha_4 t_1 = 0,$$
$$2\beta_3 + 6\beta_4 t_3 = 0.$$

Övning

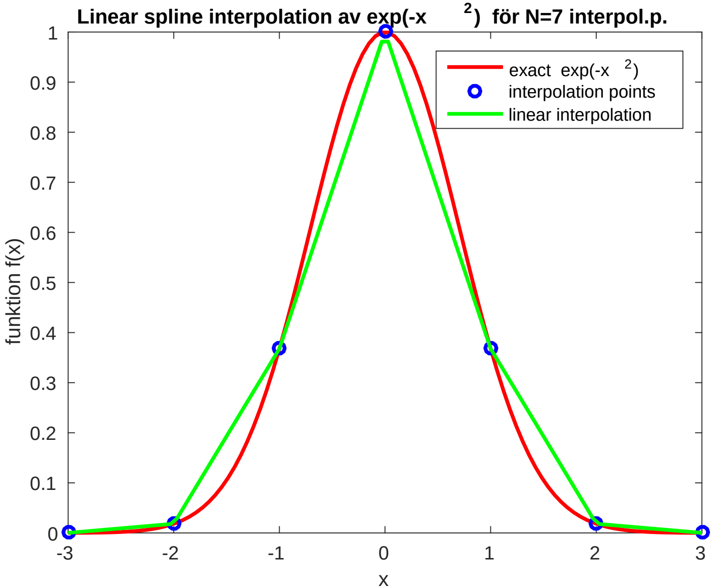
Definera splinefunktion av grad 1 som interpolerar $(t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3)$ och som består av styckvisa polynom av grad 1 på intervallen $[t_1, t_2], [t_2, t_3]$.



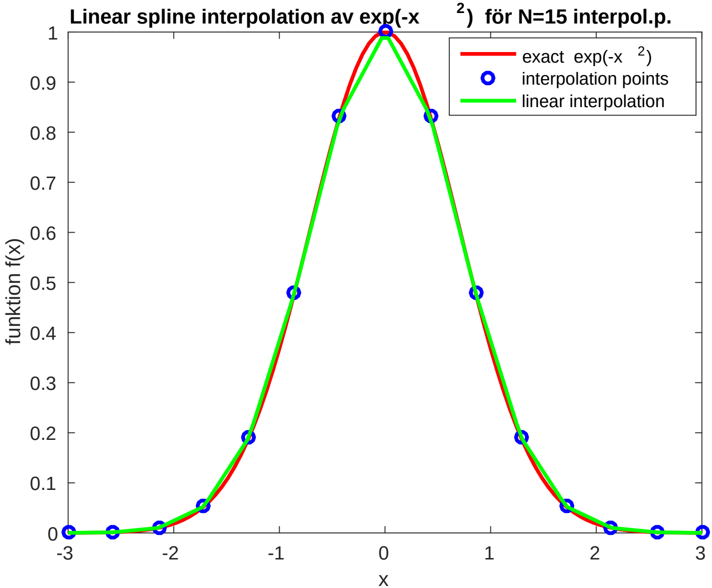
Linear spline interpolation för $f(x) = e^{-x^2}$



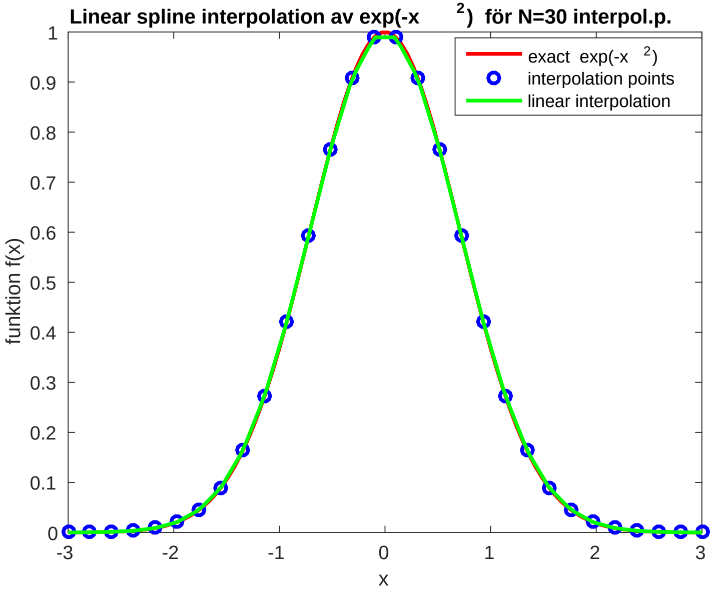
Linear spline interpolation för $f(x) = e^{-x^2}$



Linear spline interpolation för $f(x) = e^{-x^2}$



Linear spline interpolation för $f(x) = e^{-x^2}$



Linear spline interpolation för $f(x) = e^{-x^2}$