Numerisk Analys, MMG410. Lecture 1.

Lärare

- Kursansvarig och examinator: Larisa Beilina, larisa@chalmers.se, room 2089. Office hours: tisdagar, 15:00-16.00.
- Handledare för Datorlaborationer och övningar med Matlab: Tim Cardilin, Raad Salman, cardilin@chalmers.se, raadsalman@hotmail.com
- Registrering på kursen: kontakta studieadministratör Jeanette Montell, jw@chalmers.se.

Schema

Dag	Tid	Plats	Typ
Mån	13:15-15:00	Euler	Förel
Ons	13:15-15:00	Euler	Förel
Fre	13:15-15:00	Euler	Förel
Mån	15:15-17:00	MVF22, MVF24,MVF25	Datorlab
Ons	15:15-17:00	MVF22, MVF24,MVF25	Datorlab
Fre	15:15-17:00	MVF22, MVF24,MVF25	Datorlab
02.06.2017	14.00-18.00	Maskinhuset	Tentamen
?	14.00-18.00	Maskinhuset	Omtentamen
?	14.00-18.00	Maskinhuset	Omtentamen

Kursinnehåll

- Grundläggande egenskaper hos flyttalsräkning.
- Grundläggande begrepp, felanalys och datoraritmetik.
- Minstakvadratproblem.
- Några vanliga numeriska metoder för interpolation, derivering, integrering.
- Lösning av ickelinjära ekvationer, system av linjära och ickelinjära ekvationer samt Ordinarie differentialekvationer.

Kursmål

Efter avslutad kurs skall studenten

- vara förtrogen med grundläggande egenskaper hos flyttalsräkning;
- kunna bedöma tillförlitligheten hos beräknade resultat;
- kunna ställa upp några grundläggande numeriska problem på standardform;
- kunna härleda grundläggande metoder för några beräkningsproblem;
- kunna lösa enkla tillämpningsproblem med hjälp av Matlab.

Fyra sista punkterna endast avser de problemområden som står under rubriken "Kursinnehåll".

Kurslitteratur

- **Michael T. Heath, Scientific Computing - An introductory survey, McGraw-Hill, 2002.**

  Den äldre upplagan från 1997 duger också. Boken skall finnas hos Cremona.

- **Föreläsningsanteckningar** finns på kursens hemsidan. Flera studenter tycker att boken ej är nödvändig nu när det finns föreläsningsanteckningar (kopior av slides) på kursens hemsidan. Om man skall klara sig med dessa kopior måste man nog gå på föreläsningarna.

- Mina anteckningar/slider.

Former för bedömning

- Kursen består av två poäng-givande moment, laboration och tentamen, 3 Hp för lab och 4.5 Hp för tentamen.
- Skriftlig tentamen samt examination av datorlaborationer i form av muntliga eller skriftliga redovisningar.
- Tre obligatoriska laborationer som skall utföras i grupper om precis två personer. Laborationerna redovisas vid datorn i samband med handledda laborationstillfällen i matematiks datorlab (inga laborationer i fysiklabbet). Redovisa en lab (de övningar som finns på en html-kursens sida, inte enskilda korta program) så fort du är färdig. Båda gruppmedlemmarna måsta vara närvarande vid redovisning.
- För att erhålla betyg på hela kursen krävs att samtliga obligatoriska moment fullgjorts.
- Student som ej godkänts vid ordinarie tentamen erbjuds ytterligare tentamenstillfällen.
- Student äger rätt till byte av examinator efter att ha underkänts två gånger på samma kurs, om det är praktiskt möjligt. En begäran om byte av examinator ska vara skriftlig och ställas till institutionen.

Betyg

- Betygskalan omfattar betygsgraderna Underkänd (U), Godkänd (G) och Väl godkänd (VG).

Skriftlig tentamen	Matlab övningar	Betyg på hela kursen
VG	G	VG
VG	U	U
G	G	G
G	U	U
U	G	U

- Student som enligt avtal har rätt att få betyg satt med ECTS-skalan ska informera kursansvarig om detta senast en vecka efter kursstart. För student utan sådant avtal sätts inga ECTS-betyg. En ECTS-översättning görs schablon-mässigt enligt av rektor fastställd mall.

Kursutvärdering

Kursutvärdering görs med en enkät och samtal med studentrepresentanter.
På kursens aktivitet i GUL (inloggning via Studentportalen) finns en enkät som används vid utvärderingen. Enkäten stänger 10.06.2017 kl 23.59. Utvärderingen sker genom samtal mellan lärare och studentrepresentanter under kursens gång samt vid ett möte efter kursens slut då enkätresultatet diskuteras och rapport skrivs på speciell blankett.

Introduktion. Vad är numerisk analys?

Numerisk analys handlar om hur man löser beräkningsproblem på ett säkert och effektivt sätt med hjälp av dator. Några viktiga komponenter:

- Problemets egenskaper
  - Problemen kommer från naturvetenskap, teknik, matematik etc.
  - Existerar det någon lösning?
  - Är den entydig?
  - Vad händer med lösningen när man ändrar indata något?
- Algoritmens egenskaper:
  - Hur snabb är metoden, implementationen?
  - Hur mycket minne går åt?
  - Vilka fel introduceras av algoritmen (avrundningsfel etc)?

Olika typer av fel

Fel som vi som numeriker inte kan göra så mycket åt

- modellfel, bortser från luftmotstånd, friktion
- mätfel, vågar etc. är inte exakta mellanavrundningar

Example

Vi är intresserade av olika typer av beräkningsfel:

- Avrundningsfel i Matlab:
  49 * (1 / 49) - 1
  ans = -1.1102e-16
- Trunkeringsfel:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$$

- Diskretiseringsfel:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  Viktigt att välja "lagom stort" h.

Fel

Låt $\hat{x}$ vara en approximation av det exakta värdet x.
Vi definerar:

- absoluta felet

$$e = \hat{x} - x$$

- relativa felet för $x \neq 0$ är:

$$e_r = \frac{\hat{x} - x}{x}$$

Absoluta fel är ointressanta om vi inte vet ungefär hur stort x är.

Example

Är 1.4 ett stort absolut fel? Ja, om det exakta värdet är 2, men inte om det exakta värdet är 10^9.
De relativa felen är 0.7 respektive $1.4 \cdot 10^{-9}$ därför att:
a) Absoluta fel: $1.4 = \hat{x} - 2$, relativa felen: $0.7 = \frac{\hat{x}-2}{2}$.
b) Absoluta fel: $1.4 = \hat{x} - 10^9$, relativa felen: $1.4 \cdot 10^{-9} = \frac{\hat{x}-10^9}{10^9}$.

På samma sätt kan det absoluta felet 10^{-20} vara stort eller litet. Det är viktigt att känna till problemets skalning.
Absoluta fel för exacta 2: $10^{-20} = \hat{x} - 2$, relativa felen: $0.5 \cdot 10^{-20} = \frac{\hat{x}-2}{2}$.
Relativa fel säger något även om vi inte känner till problemets skalning. Vi kommer därför att vara mer intresserade av relativa fel än av absoluta fel.

Nollställen till polynom

Beräkna rötterna till $(x-1)^5 = 0$ i Matlab (där vi räknar med 16 siffror). Matlab vill ha en vektor med koefficienter:

$$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Vi ser att alla rötterna $x = 1$. Men i Matlab har vi:

koefficienter :

$r = roots([1\ \ -5\ 10\ \ -10\ 5\ \ -1])$

rötterna:

$r = 1.0008 + 0.0006i$

$1.0008 - 0.0006i$

$0.9997 + 0.0009i$

$0.9997 - 0.0009i$

0.9990

Felen:

$disp(abs(r-1)')$

1.1322e-03 1.1322e-03 1.1326e-03 1.1326e-03 1.1328e-03

Nollställen till polynom

Varför? Lös

$$(x-1)^5 = \varepsilon,$$

då

$$x = 1 + \varepsilon^{1/5}$$

Om $\varepsilon = 10^{-15}$ så är $\varepsilon^{1/5} = 10^{-15/5} = 10^{-3}$. Nollställena till polynomet $(x-1)^5$ är tydligen känsliga för störningar i koefficienterna.

Är det alltid svårt att beräkna nollställen?

Koefficienter:

c = [1 -15 85 -225 274 -120];

De exakta röttena är olika nu = 1,2,3,4,5:

r = roots(c);

fel = sort(r) - (1:5)'

Felen är mycket mindre nu:

fel = -4.9960e-15 6.6613e-14 -1.5010e-13 9.6811e-14 -8.8818e-16

Konditionstal

Vi kan betrakta rötterna r som funktioner $f(c)$ av koefficienterna c:

$$r = f(c)$$

När vi stör koefficienterna $c + \delta c$, då stör vi också rötterna $r + \delta r$
Om liten relativ ändring av indata $|\delta c|/|c|$ ger en liten relativ ändring av resultatet $|\delta r|/|r|$ säger man att det aktuella problemet är välkonditionerat.
Om resultatet ändrar sig mycket är problemet illakonditionerat.
Konditionstalet är kvoten mellan de relativa förändringarna, dvs.

$$k = \frac{|\delta r|/|r|}{|\delta c|/|c|}$$

Stabilitet

Att beräkna konditionstalet är inte alltid möjligt; det kan vara lika svårt som att lösa det egentliga problemet. För vissa problemtyper är det överkomligt. Ibland är det dock möjligt att konstruera en uppskattning k så att

$$|\delta r|/|r| \leq k|\delta c|/|c|.$$

Det räcker att känna till storleksordning på k. Är $k \approx 10$ eller är $k \approx 10^8$?

Example

Hur känsliga är rötterna, till ekvationen $x^2 + ax + b = 0$, för ändringar i a och b? Rötterna r_1 och r_2 är funktioner av a och b: $r_1(a, b), r_2(a, b)$. Låt $r = (r_1, r_2)$ beteckna en av rötterna och låt $r + \delta r$ beteckna den störda roten när vi ändrar koefficienterna med δa respektive δb.

Example

Vi har sambandet:

$$x^2 + ax + b = (r + \delta r)^2 + (a + \delta a)(r + \delta r) + (b + \delta b) = 0,$$

och vi kan skriva om den:

$$(r^2+ar+b)+(\delta r(2r+a)+\delta ar+\delta b)+((\delta r)^2+\delta a\delta r) = I_1+I_2+I_3 = 0,$$

var

$$\begin{aligned} I_1 &= (r^2 + ar + b) = 0, \\ I_2 &= (\delta r(2r + a) + \delta ar + \delta b) \approx 0, \\ I_3 &= ((\delta r)^2 + \delta a\delta r) \approx 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Example

Från andra ekvation i systemet (1) får vi:

$$\delta r \approx -\frac{(\delta a\ r + \delta b)}{2r + a}$$

eller

$$|\delta r| \leq \frac{(|\delta a\ r| + |\delta b|)}{|2r + a|} \tag{2}$$

Eftersom r_1 och r_2 är rötter så gäller att:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + ax + b$$

Vi kan jämföra koefficienterna och får

$$-(r_1 + r_2) = a, \ \ b = r_1 r_2.$$

Vi kan skriva om $r_1 - r_2 = 2r_1 + a$, och definera gapet $g := |r_1 - r_2|$.

Example

Vi kan skriva om (2)

$$|\delta r| \leq \frac{|\delta a\ r| + |\delta b|}{|g|} \tag{3}$$

Om g är liten eller $r_1 \approx r_2$, då $|\delta r|$ är stort. Dividera (3) med $|r|$ och förläng med $|a|$ respektive $|b|$.

$$\frac{|\delta r|}{|r|} \leq \frac{1}{|r|}\left(\frac{\frac{|a|}{|a|}|\delta a\ r| + \frac{|b|}{|b|}|\delta b|}{|g|}\right) \leq k \max\left(\frac{|\delta a|}{|a|}, \frac{|\delta b|}{|b|}\right), \tag{4}$$

var konditionstalet är $k \approx \frac{|a|+|b/r|}{g}$.
Observera att detta är en uppskattning av konditionstalet. Det är inte heller beräkningsbart eftersom vi måste känna r_1 och r_2.

Example

Låt

$$p(x) = (x-1)(x-1.0001) = x^2 - 2.0001x + 1.0001$$

Vi vet sedan tidigare att konditionstalet $k \approx \frac{|a|+|b/r|}{g}$ med gapet $g := |r_1 - r_2|$ har storleksordningen $1/(1.0001-1) = 10^4$. Antag att vi på något sätt har producerat de dåliga approximativa rötterna 1.11 och 0.895. De relativa felen är ungefär 11%. Det störda polynomet (som har rötterna 1.11 och 0.895) är:

$$(x-1.11)(x-0.895) = x^2 - 2.005x + 0.99345$$

Detta innebär att vi har löst nästan rätt problem; vi har gjort ett relativt bra jobb med att beräkna rötterna. Att våra rötter är dåliga approximationer beror på att problemet är illakonditionerat.

Framåt- och Bakåtanalys

Vad händer när vi stör koefficienterna c (indata i det allmänna fallet) med δ_c ? Vi har sett s.k. framåtanalys: givet δ_c vad blir

$$f(c + \delta c) - f(c).$$

Detta kan, som vi har sett, ge väldigt pessimistiska svar. Ett alternativ är följande: givet approximationen $\hat{r}$ till det exakta värdet r hur mycket måste vi ändra c för att $\hat{r}$ skall bli en exakt lösning till det störda problemet? Vi söker alltså δc sådant att

$$f(c + \delta c) = \hat{r}.$$

Man kallar detta bakåtanalys. Detta på grund av att vi tittar på indatasidan i stället för på resultatsidan.

Example

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, dash] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & f(x) = y \arrow[d, dash] \\
\tilde{x} \arrow[r, dash, "f"'] & \tilde{f} = f(\tilde{x}) = \tilde{y}
\end{tikzcd}
$$

Framåtfelet: $|y - \tilde{y}|$; Bakåtfelet: $|x - \tilde{x}|$;
$f(x) = \sqrt{x} = y; f(\tilde{x}) = \sqrt{2} \approx 1.4 = \tilde{y}$
Låt $y = 1.41421\ldots$
Framåtfelet: $|y - \tilde{y}| = |1.4 - 1.41421| \approx 0.014 \approx 1\%$
Bakåtfelet: $(1.4)^2 = 1.96 = \tilde{x}$,
$\sqrt{1.96} = 1.4$ och $|x - \tilde{x}| = |1.96 - 2| = 0.04 \approx 4\%$