Numerisk Analys, MMG410. Lecture 4.

Matrisfaktoriseringar: LU-faktorisering

$Ax = b$ löses i de tre stegen:

1. Beräkna L (undertriangular matris) och U (övertriangular matris) så att $A = LU$. För att lösa $LUx = b$ inför vi beteckningen $z = Ux$ och får då problemet $Lz = b$.
2. Lös $Lz = b$ (framåtsubstitution).
3. Lös $Ux = z$ (bakåtsubstitution). Framåtsubstitution går till på samma vis som bakåtsubstitutionen fast man tar raderna i omvänd ordning.

Kostnad?

- $A = LU$ tar ungefär $n^3/3$ vardera av $+$ och $\cdot$.
- $Lz = b$ kostar $n^2/2$ vardera av $+$ och $\cdot$.
- $Ux = z$ kostar lika mycket ($n^2/2$).

LU-faktorisering för linjära ekvationssystem

Vad är det för fördel med detta jämfört med vanlig Gausselimination ?
Svar: enklare att hantera vid teoretiskt arbete.
Det gör det också möjligt att effektivt lösa problem av typen $Ax_k = b_k$ där b_{k+1} beror av x_k.
Om alla högerleden är kända på en gång kan givetvis vanlig Gausseliminationutnyttjas.
Man löser ett sådant problem så här:

- Beräkna L och U så att $A = LU$.
- Lös $LUx_k = b_k, k = 1, 2, ...$

Definition

The leading j-by-j principal submatrix of A is $A(1:j, 1:j)$.

Theorem 2.4.

The following two statements are equivalent:
1. There exists a unique unit lower triangular L and non-singular upper triangular U such that $A = LU$.
2. All leading principal submatrices of A are non-singular.

Proof.

We first show that (1) implies (2). $A = LU$ may also be written

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$$

where A_{11} is a j-by-j leading principal submatrix, as well as L_{11} and U_{11}. Therefore
$det A_{11} = det(L_{11}U_{11}) = det L_{11} det U_{11} = 1 \cdot \prod_{k=1}^{j} (U_{11})_{kk} \neq 0$,
since L is unit triangular and U is triangular.

Proof.

(2) implies (1) is proved by induction on n. It is easy for 1-by-1 matrices: $a = 1 \cdot a$. To prove it for n-by-n matrices $\tilde{A}$, we need to find unique (n-1)-by-(n-1) triangular matrices L and U, unique (n-1)-by-1 vectors l and u, and unique nonzero scalar η such that

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ l^T & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U & u \\ 0 & \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LU & Lu \\ l^T U & l^T u + \eta \end{bmatrix}$$

By induction unique L and U exist such that $A = LU$. Now let $u = L^{-1}b$, $l^T = c^T U^{-1}$, and $\eta = \delta - l^T u$, all of which are unique. The diagonal entries of U are nonzero by induction, and $\eta \neq 0$ since $0 \neq det\tilde{A} = det(U) \cdot \eta$.

□

Matrisfaktoriseringar: LU-faktorisering

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}; \quad L-? \quad U-? \quad A = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}\ell_{11} & \ell_{11}u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \cdot u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\ell_{11} \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Räkna LU-faktorisering.

Example

$$\Rightarrow u_{11} = \frac{a_{11}}{\ell_{11}} = a_{11}$$

$$\ell_{11} \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$

$$\ell_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow \ell_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \cdot u_{22} = a_{22} \Rightarrow 2 \cdot a_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} \Rightarrow$$

$$u_{22} = a_{22} - 2 \cdot a_{12} = 15 - 2 \cdot 6 = 3$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

Är LU-faktorisering en stabil algoritm?

Här följer en grov skiss som visar vad som kan gå fel. Låt ε stå för ett litet tal, a_1, a_2 och a_3 markerar medelstora tal. LU-faktorisering blir då:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & a_2 \\ 0 & a_3 - a_2(a_1/\varepsilon) \end{bmatrix}}_{U}$$

a_1/ε blir ett stort tal, vilket ger utskiftning i beräkningen av $u_{22} = a_3 - a_2(a_1/\varepsilon)$. Låt oss anta att hela a_3 skiftas ut och att allt annat räknas ut exakt. Hur stort blir bakåtfelet?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & a_2 \\ 0 & -a_2(a_1/\varepsilon) \end{bmatrix}}_{skifted\ \ U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & a_2 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}}_{faktoriserad\ \ matris}$$

Vi har alltså faktoriserat en matris som avviker mycket från A i $(2, 2)$-elementet. Algoritmen behöver inte vara stabil.

Är LU-faktorisering en stabil algoritm?

Det kan vi dock lätt fixa. Kasta om raderna i systemet (byt ordning på ekvationerna), dvs. studera matrisen B = PA:

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ \varepsilon & a_2 \end{bmatrix}$$

LU-faktorisering blir nu:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ \varepsilon & a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon/a_1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_2 - a_3(\varepsilon/a_1) \end{bmatrix}}_{U}$$

Notera att ε/a_1 är ett litet tal. Vi får alltså inte farlig utskiftning i $u_{2,2}$. Låt oss anta att $a_3(\varepsilon/a_1)$ skiftas ut:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon/a_1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}}_{skifted\ \ U} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ \varepsilon & a_2 + a_3\varepsilon/a_1 \end{bmatrix}}_{fakt.\ \ matris} = B + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_3\varepsilon/a_1 \end{bmatrix}$$

The basic algorithm for solving $Ax = b$.

1. Permutation matrices.
2. The algorithm - overview.
3. The algorithm - factorization with pivoting.

Permutation matrices

Definition

Permutation matrix := identity matrix with permuted rows.

Example

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Permutation matrices

Definition

Permutation matrix := identity matrix with permuted rows.

Example

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$$

Permutation matrices

Definition

Permutation matrix := identity matrix with permuted rows.

Example

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Properties of permutation matrices ($P, \ P_1, \ P_2$):

- $P \cdot X =$ same matrix X with rows permuted
- $P_1 \cdot P_2$ is also a permutation
- $P^{-1} = P^T$ (reverse permutation)
- $\det(P) = \pm 1$ (+1 for even permutations, -1 for odd)

Solving $Ax = b$ using Gaussian elimination.

1. Factorize A into $A = PLU$
   Permutation   Unit lower triangular   Non-singular upper triangular

Solving $Ax = b$ using Gaussian elimination.

1. Factorize A into $A = PLU$
   Permutation Unit lower triangular Non-singular upper triangular
2. Solve $PLUx = b$ (for LUx) :

$$LUx = P^{-1}b$$

Solving $Ax = b$ using Gaussian elimination.

1. Factorize A into $A = PLU$
   Permutation Unit lower triangular Non-singular upper triangular
2. Solve $PLUx = b$ (for LUx) :
$$LUx = P^{-1}b$$
3. Solve $LUx = P^{-1}b$ (for Ux) by forward substitution:
$$Ux = L^{-1}(P^{-1}b).$$

Solving $Ax = b$ using Gaussian elimination.

1. Factorize A into $A = PLU$

   Permutation Unit lower triangular Non-singular upper triangular

2. Solve $PLUx = b$ (for LUx) :

$$LUx = P^{-1}b$$

3. Solve $LUx = P^{-1}b$ (for Ux) by forward substitution:

$$Ux = L^{-1}(P^{-1}b).$$

4. Solve $Ux = L^{-1}(P^{-1}b)$ by backward substitution:

$$x = U^{-1}(L^{-1}P^{-1}b).$$

Gaussian Elimination

LU factorization with pivoting: calculating the permutation matrix P, the unit lower triangular matrix L, and the nonsingular upper triangular matrix U such that $LU = PA$ for a given nonsingular A.

let $P = I$, $L = I$, $U = A$
for $i = 1$ to $n - 1$
find m such that $|U(m, i)|$ is the largest entry in $|U(i : n, i)|$
if $m \neq i$
swap rows m and i in P
swap rows m and i in U
if $i \geq 2$ swap elements $L(m, 1 : i - 1)$ and $L(i, 1 : i - 1)$
end if
$L(i + 1 : n, i) = U(i + 1 : n, i)/U(i, i)$
$U(i+1 : n, i+1 : n) = U(i+1 : n, i+1 : n) - L(i+1 : n, i)\ U(i, i+1 : n)$
$U(i + 1 : n, i) = 0$
end for

Forward substitution

The next algorithm is *forward substitution*. We use it to easily solve a given system $Lx = b$ with a unit lower triangular matrix L.

Forward substitution: solving $Lx = b$ with a unit lower triangular matrix L.

$x(1) = b(1)$
for $i = 2$ to n

  $x(i) = b(i) - L(i, 1:(i-1))\ x(1:(i-1))$
end for

Backward substitution

Using Backward substitution, we easily solve a given system $Ux = b$ with an upper triangular matrix U.

Backward substitution: solving $Ux = b$ with a nonsingular upper triangular matrix U.

$x(n) = b(n)/U(n, n)$
for $i = n - 1$ to 1

$x(i) = (b(i) - U(i, (i + 1) : n)\ x((i + 1) : n))/U(i, i)$
end for

LDU-faktorisering

Vi bildar givetvis aldrig permutationsmatriserna utan rader flyttas via tilldelning eller pekare.

Definition

LDU-faktoriseringen

L har ettor på diagonalen. Kan få ettor på U:s diagonal genom att bryta ut U:s diagonal (antar A ickesingulär).

Example

Här ett exempel där vi struntar i pivotering för att slippa bråk.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Så allmänt A = LDU. Vi kan utnyttja detta för att titta på två viktiga fall:

LDU-faktorisering

1. A är symmetrisk matris: $A = A^T$, då $U = DL^T$ så att $A = LDL^T$. Innebär halva antalet operationer för faktoriseringen (förutsatt att vi utnyttjar symmetrin i vår algoritm). Halverat minnesbehov.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

   Problem med pivotering och symmetri ty partiell pivotering förstör symmetrin (finns andra pivoteringsalgoritmer).

2. Det andra viktiga fallet inträffar när D i $A = LDL^T$ har positiva diagonalelement.

Matrisfaktoriseringar: DU-faktorisering

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A = DU, \quad D - \text{diagonal matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} \cdot 1 = a_{11} \Rightarrow d_{11} = a_{11}$$

$$d_{11} \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow a_{11} \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$d_{22} \cdot 1 = a_{22}$$

Räkna DU-faktorisering för

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Räkna DU-faktorisering för

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = 2;\ d_{22} = a_{22} = 3;\ u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Example: Choleskyfaktorisering

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D^{1/2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D^{1/2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$= \underbrace{\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D^{1/2}} \right]}_{C} \underbrace{\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D^{1/2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T} \right]}_{C^T} = CC^T.$$

Choleskyfaktorisering

$A = CC^T$ kallas Choleskyfaktorisering och den existerar när A är symmetrisk $A = A^T$ och positivt definit:

$$x \neq 0,\ x^T A x > 0.$$

Man kan visa att LU-faktorisering för en positivt definit matris är stabil även om vi inte pivoterar.
Positivt definita matriser är vanliga i tillämpningar.

Example

Vi har partiklar med massorna m_1, m_2, m_3 och farterna v_1, v_2, v_3. Den totala kinetiska energin, E_{kin} är

$$\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2}{2} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}}_{V^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{V}$$

$=\mathrm{V}^T MV/2.$

$E_{kin} > 0$ om någon massa rör sig, dvs. om $V \neq 0$ och $V^T MV > 0$ så att M är positivt definit.

Theorem

En symmetrisk, positivt definit (s.p.d) matris har positiva egenvärden. Omvändningen gäller också: en reell, symmetrisk matris A är positivt definit om den har positiva egenvärden.

Proof.

En reell och symmetrisk matris A har reella egenvärden och egenvektorer.

$$Ax = \lambda x$$

då

$$x^T A x = \lambda x^T x$$

och

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x} > 0$$

ty $x^T x = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$ $k > 0$ eftersom x inte är nollvektorn. $\square$

Choleskyfaktorisering för s.p.d. A är $A = L \cdot L^T$, var L är undertriangular matris.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11}^2; & \ell_{11} \cdot \ell_{21} \\ \ell_{21} \cdot \ell_{11}; & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

$\ell_{11} = 1, \quad \ell_{21} = a_{21};$

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = a_{22}$$

$$a_{21}^2 + \ell_{22}^2 = a_{22}$$

$$\ell_{22} = \sqrt{a_{22} - a_{21}^2} > 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} \ell_{11}^2; & \ell_{11} \cdot \ell_{21} \\ \ell_{21} \cdot \ell_{11}; & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

$$\ell_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\ell_{11} \cdot \ell_{21} = a_{12} \Rightarrow \ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$\ell_{21} \cdot \ell_{21} + \ell_{22} \cdot \ell_{22} = a_{22}$$

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}};$$

Räkna Choleskyfaktorisering $A = L \cdot L^T$ för

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Räkna Choleskyfaktorisering $A = L \cdot L^T$ för

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Är A s.p.d. ? Räknar egenvärden:

$$\begin{matrix} \lambda_1 \approx 1.3 > 0 \\ \lambda_2 \approx 27.7 > 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2;\ \ell_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{8}{2} = 4;\ \ell_{22} = \sqrt{25 - \frac{8^2}{4}} = 3.$$

$$A = L \cdot L^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Cholesky algorithm:

$$
\begin{array}{l}
\textit{for } j = 1 \textit{ to } n \\
\quad l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2} \\
\quad \textit{for } i = j+1 \textit{ to } n \\
\quad\quad l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{jj} \\
\quad \textit{end for} \\
\textit{end for}
\end{array}
$$

Here, $dimA = n$. If A is not positive definite, then (in exact arithmetic) this algorithm will fail by attempting to compute the square root of a negative number or by dividing by zero; this is the cheapest way to test if a symmetric matrix is positive definite.