Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2017-06-02

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Antag att vi arbetar med fyrsiffrig decimal aritmetik. Beräkna följande summa samt absoluta och relativa felen: $3.3687 + 5.039$.
  (1p)
- b) Skriv talet -10 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Beräkna LU-faktoriseringen av matrisen nedan ($a, b, c, d \neq 0$). När är matrisen singulär?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

  (2p)
- d) Skriv fixpunktsiterationsmetod för $g(x) = x^2 - 4 + x$. Bestäm fixpunkterna och konvergens. **(3p)**

---

2. Vi vill hitta en funktion på formen $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \sin(dx)$ som satisfierar följande villkor $f(1) = 1, f'(1) = 1.5, f''(1) = 5, f(2) = 3$. Parametrar a, b, c, d ska bestämmas. Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand. **(3p)**

---

3. Finn polynomet p i Lagranges form som interpolerar punkterna $(1, 5), (2, 4)$ och $(3, 7)$. **(3p)**

4.

- Vi har följande kvadraturformel:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k)$$

  som vi vet har polynomiellt gradtal noll. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 1.$$

(1p)

- Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för att beräkna integralen $\int_0^1 (6x+8x^2)dx$.
  (2p)

5.

- a) Skriv om följande ekvation som första ordningens system:

$$\begin{cases} y''(t) & = t + y(t) + y'(t), \\ y(0) & = 1, \\ y'(0) & = -1. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp bakåt-Euler metod och första iteration i den för följande problem: (**2p**)

$$y'(t) = \lambda y(t),$$
$$y(0) = y_0.$$

6.

Vi har följande modell med känt $C = const. > 0$:

$$R \approx C\mathrm{e}^{(p_1+p_2T)/(1+p_3T^2)}$$

och vill bestämma parametrarna p_1, p_2, p_3 givet mätvärden $(T_1, R_1), (T_2, R_2), ..., (T_m, R_m)$. Gör en lämplig transformation och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem i formen $\min_p \|Ap - b\|_2^2$. Matrisen A samt vektorerna b och p skall redovisas. (**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys MMG410, GU 2017-06-02

1.

- a) Exakta värdet: $x = 8.4077$, approximativt i fyrsiffrig decimal aritmetik $\tilde{x} = 8.408$. Absoluta fel $|x - \tilde{x}| = 0.0003$, relativa felet $\frac{|x-\tilde{x}|}{x} \approx 3.568e - 05$.
- b) Vi kan skriva talet -10 som $-10 = -1 \cdot [1 + 0.25] \cdot 2^3$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 3 så här: $3 + 1023 = 1026 = 2^{10} + 2 = 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Vi får följande binär representation för -10:

$$|1|10000000010|0100....0|$$

där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000010 och mantissa 52 bitar kodas som 0100....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$1100 \quad 0000 \quad 0010 \quad 0100 \quad .... \quad 0000$$

och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 1100 &= 12 = c, \\ 0000 &= 0, \\ 0010 &= 2, \\ 0100 &= 4, \\ 0000 &= 0, \\ &\cdots \end{aligned} \tag{0.1}$$

Hexadecimalt (bas 16) format:

$$c024000000000000.$$

- c)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} u_{11}\ell_{11} & \ell_{11} \cdot u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21} \cdot u_{12} + \ell_{22} \cdot u_{22} \end{bmatrix},$$

eller

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} u_{11} \cdot 1 & 1 \cdot u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\ell_{11} = \ell_{22} = 1, u_{11} = a, u_{12} = b, \ell_{21}u_{11} = c, \ell_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = d.$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} \cdot b \end{bmatrix}}_{U}$$

Singulär om $ad = cb$.

- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174. Fixpunktsiterationsmetod för $g(x) = x^2 - 4 + x$ är:

$$x^{k+1} = g(x^k).$$

För exakt x^*:

$$x^* = g(x^*),$$

eller

$$g(x^*) - x^* = 0,$$

det betyder att

$$\left((x^*)^2 - 4 + x^*\right) - x^* = 0,$$
$$(x^*)^2 - 4 = 0.$$

Fixpunkter:

$$x_1^* = 2, x_2^* = -2.$$

Konvergens:

$$g'(x) = (x^2 - 4 + x)' = 2x + 1,$$
$$g'(x_1^*) = 2x_1^* + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$
$$g'(x_2^*) = 2x_2^* + 1 = 2 \cdot (-2) + 1 = -3.$$

$|g'(x_1^*)| = |g'(2)| = 5 > 1$ - divergens, $|g'(x_2^*)| = |g'(-2)| = 3 > 1$ - divergens.

2. Vi inför vektorn $x = [a, b, c, d]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(a, b, c, d)$. Ekvationerna blir:

$$a + b + c + \sin(d) - 1 = 0,$$
$$a + 2b + 3c + d\cos(d) - 1.5 = 0,$$
$$2b + 6c - d^2 \sin(d) - 5 = 0,$$
$$2a + 4b + 8c + \sin(2d) - 3 = 0.$$

Newton metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a^k + b^k + c^k + \sin(d^k) - 1 \\ a^k + 2b^k + 3c^k + d^k\cos(d^k) - 1.5 \\ 2b^k + 6c^k - (d^k)^2 \sin(d^k) - 5 \\ 2a^k + 4b^k + 8c^k + \sin(2d^k) - 3. \end{bmatrix},$$

var

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cos(d^k) \\ 1 & 2 & 3 & \cos(d^k) - d^k \sin(d^k) \\ 0 & 2 & 6 & -2d^k \sin(d^k) - (d^k)^2 \cos(d^k) \\ 2 & 4 & 8 & 2\cos(2d^k) \end{bmatrix}.$$

3. För tre punkter $(1,5),(2,4)$ och $(3,7)$ har vi: $y_1 = 5, y_2 = 4, y_3 = 7, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.

Interpolationspolynomet på Lagranges form för $n = 3$ är:

$$p(t) = y_1\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

eller för $y_1 = 5, y_2 = 4, y_3 = 7, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$:

$$p(t) = 5\frac{(t-2)(t-3)}{(1-2)(1-3)} + 4\frac{(t-1)(t-3)}{(2-1)(2-3)} + 7\frac{(t-1)(t-2)}{(3-1)(3-2)},$$

eller

$$p(t) = 5\frac{(t-2)(t-3)}{2} - 4(t-1)(t-3) + 7\frac{(t-1)(t-2)}{2}$$

vilket efter förenkling blir

$$p(t) = 2t^2 - 7t + 10.$$

4.

– a) Formeln

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k)$$

skall vara exakt för polynom x^p för $p = 0$.

Då gäller:

$$1 = \int_0^1 1dx = \int_0^1 x^0 dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

– b) Rektangelmetoden för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall vi har $f(x) = 6x + 8x^2$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot 1/2 + 8 \cdot (1/2)^2 = 5$$

då rektangelmetoden för $\int_0^1 (6x + 8x^2)dx$ ger oss:

$$\int_0^1 (6x + 8x^2)dx \approx (1-0) \cdot 5 = 5.$$

5.

– a) Sätt

$$u_1(t) = y(t),$$
$$u_2(t) = y'(t).$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2(t), \\ u_2'(t) & = t + u_1(t) + u_2(t), \\ u_1(0) & = 1, \\ u_2(0) & = -1. \end{cases}$$

– b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 263. Implicit, eller bakåt-Euler metod är: $y^{k+1} = y^k + \tau f(t^{k+1}, y^{k+1})$ för diskretiseringen $y'(t) \approx \frac{y^{k+1}-y^k}{\tau}$.

Bakåt-Euler metod för vårt problem är:

$$y^{k+1} = y^k + \tau\lambda y^{k+1},$$

eller

$$y^{k+1} - \tau\lambda y^{k+1} = y^k,$$

då har vi

$$(1 - \tau\lambda)y^{k+1} = y^k,$$

som lösas för y^{k+1}:

$$y^{k+1} = (1 - \tau\lambda)^{-1} y^k.$$

Första iteration i den för $k = 0$ ska vara:

$$y^1 = \frac{y^0}{1 - \tau\lambda}.$$

6. Logaritmera:

$$\ln R = \ln C + \frac{p_1 + p_2 T}{1 + p_3 T^2}.$$

Skriv om:

$$\ln R(1 + p_3T^2) = \ln C(1 + p_3T^2) + p_1 + p_2T,$$

eller

$$\ln R(1 + p_3T^2) = \ln C + p_3 \ln C\ T^2 + p_1 + p_2T.$$

Samla all termer med parametrar på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$p_1 + p_2T + p_3(\ln C - \ln R)\ T^2 = \ln R - \ln C.$$

Konstruera matris A för att hitta $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ i minstakvadratproblem $\min_p \|Ap - b\|_2$, där raderna i A innehåller

$$[1, T_k, (\ln C - \ln R_k)\ T_k^2], \quad k = 1, ..., m.$$

och vectorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln R_1 - \ln C \\ \ln R_2 - \ln C \\ \dots \\ \ln R_k - \ln C \\ \dots \\ \ln R_m - \ln C \end{bmatrix}, k = 1, ..., m.$$