# Tentamen: Numerisk Analys
# MMG410, GU
# 2017-08-15

---

**1.** Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Beräkna $k_1(A)$ (konditionstalet i ettnorm) då
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 40 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
**(1p)**
- b) Skriv talet 2.25 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Beräkna Cholesky-faktoriseringen av matrisen nedan:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
**(2p)**
- d) Skriv fixpunktsiterationsmetod för $g(x) = \cos(x-1) + x$. Bestäm fixpunkterna och konvergens. **(3p)**

---

**2**. Vi vill hitta en funktion på formen $f(x) = \cos(ax) + bx + \sin(cx)$ som satisfierar följande villkor $f(1) = 10, f'(1) = 15, f''(1) = 5$. Parametrar $a, b, c$ ska bestämmas. Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system. Försök inte att lösa systemet för hand. **(3p)**

---

**3**. Finn polynomet $p$ av grad två med basfunktioner $t^j, j = 0, 1, 2$ som interpolerar punkterna $(1, 5), (2, 4)$ och $(3, 7)$.
(**3p**)

---

**4**.

- Vi vill beräkna integralen $\int_0^1 f(t)\ dt$ med hjälp av Gausskvadratur med $n$ vikter. Skriv ut en linjär transformation, som behövs för att beräkna integral $\int_0^1 f(t)\ dt$ med hjälp av Gausskvadratur, samt metod, som beräknar integral $\int_0^1 f(t)\ dt$ med hjälp av Gausskvadratur med $n$ vikter.
(**2p**)
- Använd Simpsons formel för att beräkna integralen $\int_0^1 5x^2 dx$.
(**1p**)

---

---

**5**.

- a) Skriv om följande ekvation som första ordningens system:

$$\begin{cases} y'''(t) & = y'(t) + ty(t), \\ y(0) & = 1, \\ y'(0) & = -1, \\ y''(0) & = 3. \end{cases}$$

  (**2p**)
- b) Sätt upp bakåt-Euler metod för problemet

$$y'(t) = (y(t))^3,$$
$$y(0) = 1.$$

  Formulera den ickelinjära ekvation som uppkommer för att beräkna $y_{k+1}$ samt ställ upp Newtons metod för denna ekvation. (**2p**)

---

**6**.

Vi har en matematisk modell där $c$ är kopplat till $t$ på följande sätt (det står alltså två upphöjt till):

$$c \approx \alpha \cdot e^{1+(\beta+\alpha)t+\gamma t^2}$$

där $\alpha, \beta$ och $\gamma$ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten oh ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen $A$ samt vektorerna $b$ oh $x$ skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från $x$.

(**3p**)

# Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys
# MMG410, GU
# 2017-08-15

**1**.

- a) $k_1(A)$ (konditionstalet i ettnorm) för

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 40 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

är:

$$k_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \begin{bmatrix} 4 & 40 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & -2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}_1 = 45 \cdot \frac{11}{5} = 45 \cdot 2.2 = 99.$$

- b) Vi kan skriva talet 2.25 som $2.25 = +[1 + 0.125] \cdot 2^1$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 1 så här: $1 + 1023 = 1024 = 2^{10}$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.125 = 0 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/8$. Vi får följande binär representation för 2.25:

$$|0|10000000000|0010....0|$$

där 0 är kod för +, exponenten 11 bitar kodas som 10000000000 och mantissa 52 bitar kodas som 0010....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:

$$0100 \quad 0000 \quad 0000 \quad 0010 \quad .... \quad 0000$$

och kodar varje fyra bitar:

$$\begin{aligned} 0100 &= 4, \\ 0000 &= 0, \\ 0000 &= 0, \\ 0010 &= 2, \\ 0000 &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \tag{0.1}$$

Hexadecimalt (bas 16) format:

$$4002000000000000.$$

- c) Matrisen $A$ är s.p.d. ($\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 3 > 0$), då kan vi göra Cholesky-faktoriseringen. Choleskyfaktorisering för s.p.d. $A$ är $A = L \cdot L^T$, där $L$ är undertriangular matris.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} \ell_{11}^2; & \ell_{11} \cdot \ell_{21} \\ \ell_{21} \cdot \ell_{11}; & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix}$$

, eller

$$
\begin{aligned}
&\ell_{11}^2 = 2 \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{2} \\
&\ell_{11} \cdot \ell_{21} = -1 \Rightarrow \ell_{21} = \frac{-1}{\ell_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\ell_{21} \cdot \ell_{21} + \ell_{22} \cdot \ell_{22} = 2 \\
&\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 2 \Rightarrow \ell_{22} = \sqrt{2 - (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}};
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}}_{L^T}
$$

- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174. Fixpunktsiterationsmetod för

$$g(x) = \cos(x-1) + x$$

är:

$$x^{k+1} = g(x^k).$$

För exakt $x^*$:

$$x^* = g(x^*),$$

eller

$$g(x^*) - x^* = 0,$$

det betyder att

$$\cos(x^* - 1) + x^* - x^* = 0,$$
$$\cos(x^* - 1) = 0.$$

Fixpunkterna är:

$$x_k^* = 1 + \pi/2 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ....$$

Konvergens:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (\cos(x-1) + x)' = -\sin(x-1) + 1, \\
g'(x_k^*) &= -\sin(1 + \pi/2 + k\pi - 1) + 1 = -\sin(\pi/2 + k\pi) + 1,
\end{aligned}
$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ....$$

Vi får attraktiva fixpunkter och konvergens när $|g'(x_k^*)| < 1$ eller när $|g'(x_k^*)| = |-\sin(\pi/2 + k\pi) + 1| = 0 < 1$. Attraktiva fixpunkter är:

$$x_k^* = 1 + \pi/2 + k\pi, \quad k = 0, \pm 2, \pm 4, ....$$

**2**. Vi inför vektorn $x = [a, b, c]^T$ och skriver $f(x)$ istället för $f(a, b, c)$. Ekvationerna blir:

$$
\begin{aligned}
\cos(a) + b + \sin(c) - 10 &= 0, \\
-a\sin(a) + b + c\cos(c) - 15 &= 0, \\
-a^2\cos(a) - c^2\sin(c) - 5 &= 0.
\end{aligned}
$$

Newtons metod kan skrivas:

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \cos(a^k) + b^k + \sin(c^k) - 10 \\ -a^k \sin(a^k) + b^k + c^k \cos(c^k) - 15 \\ -(a^k)^2 \cos(a^k) - (c^k)^2 \sin(c^k) - 5 \end{bmatrix},$$

där

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} -\sin(a^k) & 1 & \cos(c^k) \\ -(\sin(a^k) + a^k \cos(a^k)) & 1 & \cos(c^k) - c^k \sin(c^k) \\ -2a^k \cos(a^k) + (a^k)^2 \sin(a^k) & 0 & -2c^k \sin(c^k) - (c^k)^2 \cos(c^k) \end{bmatrix}.$$

**3**. För tre punkter $(1,5), (2,4)$ och $(3,7)$ har vi: $y_1 = 5, y_2 = 4, y_3 = 7, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.

Interpolationspolynomet av grad två med basfunktioner $t^j$ är:

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \tag{0.2}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \tag{0.3}$$

vilket ger $x_1 = 10, x_2 = -7, x_3 = 2$, och interpolationspolynomet blir

$$p(t) = 2t^2 - 7t + 10.$$

**4**.

– a) Gausskvadratur är konstruerad för att ge ett exakt resultat för polynom av grad $2n-1$ eller mindre med ett lämpligt val av punkterna $x_i$ och vikterna $w_i,\ i = 1, ..., n$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

$t$ ligger i ett intervall $[a,b]$, och $x$ ligger på $[-1,1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2},$$

då integral $\int_0^1 f(t)dt$ med $n$ vikter $\omega_i, i = 1, ..., n$ kan beräknas som

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1-0}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1-0}{2}x + \frac{0+1}{2}\right)\, dx \tag{0.4}$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i f\left(\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}\right). \tag{0.5}$$

– b) Simpsons metod för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

I vårt fall har vi:

$$f(x) = 5x^2, a = 0, b = 1, f(0) = 0, f(1) = 5, f\left(\frac{0+1}{2}\right) = 5 \cdot /(1/2)^2 = 1.25,$$

då Simpsons metod för $\int_0^1 5x^2\, dx$ ger oss:

$$\int_0^1 5x^2\, dx \approx (1-0)/6 \cdot (0 + 4 \cdot 1.25 + 5) = 1.6667.$$

**5**.

– a) Sätt

$$u_1(t) = y(t),$$
$$u_2(t) = y'(t),$$
$$u_3 = = y''(t).$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2, \\ u_2'(t) & = u_3, \\ u_3'(t) & = u_2(t) + tu_1(t), \\ u_1(0) & = 1, \\ u_2(0) & = -1, \\ u_3(0) & = 3. \end{cases}$$

– b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 263. Implicit, eller Bakåt-Euler metod är: $y^{k+1} = y^k + hf(t^{k+1}, y^{k+1})$ för diskretiseringen $y'(t) \approx \frac{y^{k+1}-y^k}{h}$.

Bakåt-Euler's metod för vårt problem är:

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = (y^{k+1})^3$$

eller

$$y^{k+1} - h(y^{k+1})^3 = y^k.$$

För att lösa den ekvationen använder vi Newtons metod. Vi inför ny variabel $z = y^{k+1}$ och skriver om bakåt Eulers metod som:

$$z - hz^3 = y^k.$$

Newtons metod för $f(z) = z - hz^3 - y^k = 0$ blir:

$$z^{j+1} = z^j - \frac{z^j - h(z^j)^3 - y^k}{1 - 3h(z^j)^2}$$

Här, $j$ är iteration i Newton's metod.

**6**. Logaritmera modellproblemet

$$c \approx \alpha \cdot e^{1+(\beta+\alpha)t+\gamma t^2}$$

för att få:

$$\ln c = \ln(\alpha) + 1 + (\beta + \alpha)t + \gamma t^2$$

Samla all termer med parametrar på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$1 \cdot \ln(\alpha) + (\beta + \alpha)t + \gamma t^2 = \ln c - 1$$

Konstruera matris $A$ för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = \ln(\alpha), x_2 = \beta + \alpha, x_3 = \gamma$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2$, där raderna i $A$ innehåller

$$[1, t_k,\ t_k^2], \quad k = 1, ..., m.$$

och vektorn $b$ ska vara

$$\begin{bmatrix} \ln c_1 - 1 \\ \ln c_2 - 1 \\ ... \\ \ln c_m - 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får: $\alpha = e^{x_1}, \beta = x_2 - \alpha = x_2 - e^{x_1}, \gamma = x_3$.