Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-01-02

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Beräkna $k_\infty(A)$ (konditionstalet i maxnorm), som beror på α, $\alpha \geq 2$, då

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  (1p)
- b) Skriv talet -4.25 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Låt A vara symmetrisk och positiv definit matris, $\dim A = n \times n$. Använd definitionen på positivt definit för att bevisa att A är ickesingulär.
  (2p)
- d) Sätt upp Newton's metod för lösningen av ekvationen $(x-2)^2 = 0$. Skriv fixpunktsiterationsmetod som svarar mot Newtons metod. Bestäm fixpunkterna, konvergensordningen i fixpunktsiterationsmetod och i Newtons metod, bestäm också asymptotisk felkonstant.
  (3p)

---

2. Vi vill hitta ett lokalt minimum till den reellvärda funktion $f(x, y, z)$, x, y, z är reella variabler. Vi kan försöka hitta minimum där tre partiella derivatorna av funktionen $f(x, y, z)$ är noll.
Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system när $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + \cos(2x + y + 3z)$. Försök inte att lösa systemet för hand. **(3p)**

---

3. Finn polynomet p av grad tre på Newton's form som interpolerar punkterna $(0, 1), (1, 3)$, $(2, 4)$ och $(3, 16)$.
(**3p**)

4.

- Vi har en kvadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

  för lämpliga punkterna x_i och vikterna w_i, $i = 1, ..., n$. Hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[-2, 2]$?
  (2p)
- Använd mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) i tre punkter $(0, 0.5, 1)$ för att beräkna integralen: $\int_0^1 x^2 dx$. (**1p**)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) + 2x(t) - 3(y'(t))^2, \\ x''(t) = y(t) - x(t) - x'(t), \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = -1, \\ x(-1) = 0, \\ x'(-1) = 1. \end{cases}$$

  (**2p**)

- b) Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet

$$y'(t) = t^2 + \sin(y(t)),$$
$$y(0) = \pi/2.$$

  (**2p**)

6.

Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx 0.01 \cdot 2^{\alpha} \cdot 10^{(\beta+\alpha)t-\gamma t^3}$$

där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör transformation $\log_{10}$ och variabelbyten oh ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.

(**3p**)

Kortfattade lösningsförslag: Numerisk Analys MMG410, GU 2018-01-02

1.

- a) $k_\infty(A)$ (konditionstalet i maxnorm) för
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
beräknas som $k_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$. Vi beräknar först A^{-1}:
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Konditionstalet i maxnorm för $\alpha \geq 2$ är:
$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 1 + \alpha.$$
- b) Vi kan skriva talet -4.25 som $-4.25 = -[1+0.0625] \cdot 2^2$. Vi ser nu att vi behöver skriva exponenten 2 så här: $2 + 1023 = 1025 = 2^{10} + 2^0$. Mantissa: 1 kodas inte, $0.0625 = 0 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 1/16$. Vi får följande binär representation för -4.25:
$$|1|\underbrace{10000000001}_{exponenten}|\quad\underbrace{00010....0}_{mantissa\ 52\ bitar}\quad|$$
där 1 är kod för $-$, exponenten 11 bitar kodas som 10000000001 och mantissa 52 bitar kodas som 00010....0. I hexadecimalt (bas 16) format: först vi splittrar till 4 bitar binär form:
$$1100 \;\; 0000 \;\; 0001 \;\; 0001 \;\; .... \;\; 0000$$
och kodar varje fyra bitar:
$$\begin{aligned} 1100 &= c, \\ 0000 &= 0, \\ 0001 &= 1, \\ 0001 &= 1, \\ 0000 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$
Hexadecimalt (bas 16) format för -4.25 är:
$$c011000000000000.$$
- c) Definition av s.p.d. matris är: $\forall x \neq 0 \;\; x^T A x > 0$. Om A vore singulär då skulle det existera $x \neq 0$ så att $Ax = 0$, men det strider mot antagande att A är positivt definit.
- d) Se föreläsningsanteckningarna, s. 174.
Newtons metod är:
$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

var k är iterationsindex, För $f(x) = (x-2)^2 = 0$ Newtons metod är:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k-2)^2}{2(x^k-2)} = \frac{x^k+2}{2},$$

Fixpunktsiterationsmetod är:

$$x^{k+1} = g(x^k).$$

I exemplet vi kan ta $g(x) = \frac{x+2}{2}$. Fixpunkter: för exakt x^*:

$$x^* = g(x^*),$$

eller

$$g(x^*) - x^* = 0,$$

det betyder att

$$x^* - \frac{x^*+2}{2} = 0,$$

Fixpunkt är:

$$x^* = 2,$$

som är också exakt lösning till ekvationen $(x-2)^2 = 0$.

Konvergens:

$$g'(x) = 1/2,$$
$$g'(x^*) = 1/2.$$

Vi har linjärt konvergens i fixpunktsiterationsmetoden eftersom $|g'(x^*)| = 1/2 < 1$. Attraktivt fixpunkt är $x^* = 2$.

För att bestäma konvergensordningen i Newton's metod får vi:

$$x^{k+1} - 2 = \frac{x^k+2}{2} - 2 = \frac{1}{2}(x^k - 2),$$

$$\frac{x^{k+1}-2}{x^k-2} = \frac{1}{2} \to \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{k+1}-2|}{|x^k-2|} = \frac{1}{2},$$

och Newtons metod är linjärt konvergent med asymptotisk felkonstant $\frac{1}{2}$.

2. Vi inför vektorn $a = [x, y, z]^T$ och skriver $f(a)$ istället för $f(x, y, z)$. Ekvationerna blir:

$$f_1 := f'_x(x, y, z) = 3x^2 - 2\sin(2x + y + 3z) = 0,$$
$$f_2 := f'_y(x, y, z) = 3y^2 - \sin(2x + y + 3z) = 0,$$
$$f_3 := f'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3\sin(2x + y + 3z) = 0.$$

Newtons metod kan skrivas:

$$a^{k+1} = a^k - [J(a^k)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3(x^k)^2 - 2\sin(2x^k + y^k + 3z^k) \\ 3(y^k)^2 - \sin(2x^k + y^k + 3z^k) \\ 3(z^k)^2 - 3\sin(2x^k + y^k + 3z^k) \end{bmatrix},$$

där

$$J(a^k) = \begin{bmatrix} 6x^k - 4\cos(2x^k + y^k + 3z^k) & -2\cos(2x^k + y^k + 3z^k) & -6\cos(2x^k + y^k + 3z^k) \\ -2\cos(2x^k + y^k + 3z^k) & 6y^k - \cos(2x^k + y^k + 3z^k) & -3\cos(2x^k + y^k + 3z^k) \\ -6\cos(2x^k + y^k + 3z^k) & -3\cos(2x^k + y^k + 3z^k) & 6z^k - 9\cos(2x^k + y^k + 3z^k) \end{bmatrix}.$$

3. För fyra punkter $(0,1),(1,3)$, $(2,4)$ och $(3,16)$ har vi: $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 3$ och $p(t_1) = 1, p(t_2) = 3, p(t_3) = 4, p(t_4) = 16$.

Interpolationspolynomet av grad tre på Newtons form är:

$$p(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + x_4(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3).$$

För $t = t_1$ har vi:

$$p(t_1) = x_1.$$

För $t = t_2$ har vi:

$$p(t_2) = x_1 + x_2 \cdot (t_2 - t_1).$$

För $t = t_3$ har vi:

$$p(t_3) = x_1 + x_2 \cdot (t_3 - t_1) + x_3 \cdot (t_3 - t_1)(t_3 - t_2).$$

För $t = t_4$ har vi:

$$p(t_4) = x_1 + x_2 \cdot (t_4 - t_1) + x_3 \cdot (t_4 - t_1)(t_4 - t_2) + x_4 \cdot (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3).$$

Undertriangulära ekvationssystemet är:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & 0 & 0 \\ 1 & t_3 - t_1 & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) & 0 \\ 1 & t_4 - t_1 & (t_4 - t_1)(t_4 - t_2) & (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(t_1) \\ p(t_2) \\ p(t_3) \\ p(t_4) \end{bmatrix}. \tag{0.1}$$

För vårt problemet systemet (0.1) skrivs:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

Vi löser systemet (0.2) och får: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -0.5, x_4 = 2$, då interpolationspolynomet av grad tre på Newtons blir:

$$p(t) = 1 + 2t - 0.5t(t - 1) + 2t(t - 1)(t - 2) = 2t^3 - 6.5t^2 + 6.5t + 1.$$

4.

- a) Gausskvadratur är konstruerad för att ge ett exakt resultat för polynom av grad $2n-1$ eller mindre med ett lämpligt val av punkterna x_i och vikterna $w_i,\ i = 1, ..., n$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

  Om vi ska approximera integral

$$\int_a^b f(t)dt,$$

  t ligger i ett intervall $[a, b]$, och x ligger på $[-1, 1]$, får vi göra en linjär avbilding till detta intervall:

$$t = \frac{b - a}{2}x + \frac{a + b}{2}.$$

I så fall integral $\int_{-2}^{2} f(t)dt$ med n vikter $\omega_i, i = 1, ..., n$ och i punkterna x_i kan beräknas som

$$\int_{-2}^{2} f(t)dt \approx \frac{2-(-2)}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{2-(-2)}{2}x + \frac{-2+2}{2}\right) dx \tag{0.3}$$

$$\approx 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(2x_i). \tag{0.4}$$

- b) Mittpunktsmetoden (rektangelmetoden) för $\int_a^b f(x)dx$ är:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I vårt fall för tre punkter $(0, 0.5, 1)$ har vi:

$$\int_0^1 x^2\ dx = \int_0^{0.5} x^2\ dx + \int_{0.5}^1 x^2\ dx \approx 0.5\frac{0.5^2}{4} + 0.5\frac{1.5^2}{4} = 0.3125.$$

5.

- a) Sätt

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y(t), \\ u_2(t) &= y'(t), \\ u_3(t) &= x(t), \\ u_4(t) &= x'(t). \end{aligned}$$

Vi får systemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) & = u_2, \\ u_2'(t) & = u_1 + 2u_3 - 3(u_2)^2, \\ u_3'(t) & = u_4, \\ u_4'(t) & = u_1 - u_3 - u_4, \\ u_1(-1) & = 0, \\ u_2(-1) & = -1, \\ u_3(-1) & = 0, \\ u_4(-1) & = 1. \end{cases}$$

- b) Se föreläsningsanteckningarna, s. 237, . Explicit, eller Framåt-Eulers metod är: $y^{k+1} = y^k + hf(t^k, y^k)$ för diskretiseringen $y'(t) \approx \frac{y^{k+1}-y^k}{h}$.
Framåt-Eulers metod för vårt problem är:

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{h} = (t^k)^2 + \sin y(t^k)$$

eller

$$y^{k+1} = y^k + h((t^k)^2 + \sin y(t^k))$$

Första iteration i den för $k = 0, t^0 = 0, y^0 = y(t^0) = y(0) = \pi/2$ ska vara:

$$y^1 = y^0 + h((t^0)^2 + \sin y(t^0)) = \pi/2 + h(0 + \sin(\pi/2)) = \pi/2 + h \cdot 1 = \pi/2 + h.$$

6. Logaritmera modellproblemet

$$c \approx 0.01 \cdot 2^{\alpha} \cdot 10^{(\beta+\alpha)t-\gamma t^3}$$

för att få:

$$\log_{10} c \approx \log_{10}(0.01) + \alpha \log_{10} 2 + (\beta+\alpha)t - \gamma t^3 = -2 + \alpha \log_{10} 2 + (\beta+\alpha)t - \gamma t^3.$$

Samla all termer med parametrar på vänster sida och termer med kända värderna - på höger sida:

$$\alpha \log_{10} 2 + (\beta+\alpha)t - \gamma t^3 = \log_{10} c + 2$$

Konstruera matris A för att hitta $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ med $x_1 = \alpha, x_2 = \beta+\alpha, x_3 = \gamma$ i minstakvadratproblem $\min_x \|Ax - b\|_2$, där raderna i A innehåller

$$[\log_{10} 2, t_k,\ -t_k^3], \quad k = 1, ..., m.$$

och vektorn b ska vara

$$\begin{bmatrix} \log_{10} c_1 + 2 \\ \log_{10} c_2 + 2 \\ ... \\ \log_{10} c_m + 2 \end{bmatrix}.$$

Sedan $\alpha = x_1, \beta = x_2 - \alpha, \gamma = x_3$.