

Numerisk Analys, MMG410. Övningar på kapitel
5: icke linjära ekvationer.

Övning 1

Man kan härleda Newtons metod med hjälp av Taylors formel. Vi står i punkten x_k och söker en korrektion, h , så att $f(x_k + h) = 0$. Gör en Taylorutveckling och ta bara med upp till första ordningens termer i h .

Lösning:

Taylors formel:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2/2 + \dots$$

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eller i iterativt form för $x = x_k + h$,

$$0 = f(x_k + h) \approx f(x_k) + hf'(x_k)$$

så

$$h \approx -f(x_k)/f'(x_k)$$

vilket ger nästa punkt

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k),$$

eller Newtons metod.

Övning 2

Uppskatta $|x^* - \hat{x}|$ då $f(x) = x^3 - 2x - 5$ och $\hat{x} = 2.1$ för problemet $f(x) = 0$.

Lösning:

Residualen är $f(\hat{x}) = \hat{x}^3 - 2\hat{x} - 5 = 0.061 > 0$. Eftersom $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$ finns minst en rot i intervallet $(2, 2.1)$. Vi noterar att $f'(x) = 3x^2 - 2 > 0$ om $x > \sqrt{2/3} \approx 0.82$. Detta innebär att funktionen är strängt växande vid (det enda) nollstället och att $x^* < \hat{x}$. Vi har visat att $|x^* - \hat{x}| \leq |f(\hat{x})|/M$ där M är en undre begränsning av $|f'(x)|$ i intervallet $x(x^*, \hat{x})$. Eftersom derivatan är strängt växande och positiv för $x \in [2, 2.1]$ och eftersom $2 < x^* < \hat{x}$ så gäller att $|x^* - \hat{x}| \leq 0.061/f'(2.1) = 0.0054319$. För att sammanfatta: $2.1 - 0.0054319 = 2.0946 \leq x^* < 2.1$ Taylors formel är:

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

För exakt x^* och $x_0 = \hat{x}$ Taylors formel är:

$$0 = f(x^*) \approx f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x^* - \hat{x})$$

eller för $\hat{x} = 2.1$:

$$|x^* - \hat{x}| \leq |f(\hat{x})/f'(\hat{x})| = 0.061/f'(2.1) = 0.0054319.$$

Övning 3

Detta är ett något akademiskt exempel, eftersom vi kan beräkna rötterna exakt. Det visar dock på de problem som uppstår när vi inte kan finna något användbart M i feluppskattningen. Vi vill uppskatta $|x^* - \hat{x}|$, då $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ med $\hat{x} = 1.7$. Notera att $\sqrt{3}$ är en dubbelrot.

Lösning:

Residualen är $f(\hat{x}) = 0.0121 > 0$. Det är inte möjligt att få någon användbar begränsning av derivatan, $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x \cdot (x^2 - 3)$, ty $f'(\sqrt{3}) = 0$. Vi misstänker starkt att $\sqrt{3}$ är en dubbelrot (dvs. $f(x^*) = f'(x^*) = 0$). För att få en gräns på $|x^* - \hat{x}|$ utnyttjar vi en term till i Taylorutvecklingen och får:

$$f(\hat{x}) = f(x^* + \underbrace{\hat{x} - x^*}_h) = \underbrace{f(x^*)}_0 + (\hat{x} - x^*) \underbrace{f'(x^*)}_0 + \frac{(\hat{x} - x^*)^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x^*, \hat{x}).$$

Om $M \leq |f''(\xi)|, \xi \in (\hat{x}, x^*)$ gäller att

$$|\hat{x} - x^*| \leq \sqrt{\frac{2|f(\hat{x})|}{M}}$$

Vi vill uppskatta $|x^* - \hat{x}|$, då $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ med $\hat{x} = 1.7$.

Vi ser att $f''(x) = (x^4 - 6x^2 + 9)'' = 12(x^2 - 1)$ som är växande i en omgivning kring roten $\sqrt{3}$. Vi noterar att $f(x)$ uppför sig som en parabel i en omgivning av roten. Eftersom $f'(\hat{x}) = f'(1.7) = -0.748 < 0$ ligger $\hat{x}$ till vänster om x^* . Alltså kan vi ta $M = f''(\hat{x})$ och får:

$$|\hat{x} - x^*| \leq \sqrt{\frac{2|f(\hat{x})|}{f''(\hat{x})}} < 3.3 \cdot 10^{-2}$$

För att sammanfatta:

$$1.7 \leq x^* \leq 1.7 + 3.3 \cdot 10^{-2}.$$

Övning 4

Sätt upp Newtons metod för problemet $x^2 = 1$ och visa att metoden aldrig konvergerar om $x^0 = \alpha i$, $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$. (Vi studerar komplexa x_k med andra ord). Visa slutligen att metoden konvergerar för alla reella $x_0 \neq 0$ (svårare). Avsikten med denna övning är att Du skall se hur komplicerade konvergensgenskaperna hos Newtons metod är.

Lösning:

Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Vi har: $f(x) = x^2 - 1 = 0$, $f(x_k) = x_k^2 - 1$, $f'(x_k) = 2x_k$, Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 1}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 1}{2x_k} = (x_k + 1/x_k)/2.$$

Om x_k är rent imaginärt $x_k = \alpha i$ så gäller

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (x_k + 1/x_k)/2 = (\alpha i + 1/\alpha i)/2 = (\alpha i + i/\alpha i \cdot i)/2 \\&= \frac{i}{2} \left[\alpha - \frac{1}{\alpha} \right]\end{aligned}$$

som också är rent imaginärt. Så om något x_k är rent imaginärt så kommer också alla efterföljande värden att vara det (enda undantaget är om något $x_k = 0$ i vilket fall x_{k+1} inte existerar).

Fixpunkterna: $x^* = f(x^*)$:

$$\begin{aligned}x^* &= (x^* + 1/x^*)/2, \\2x^* &= x^* + 1/x^*; \quad 2x^* = \frac{(x^*)^2 + 1}{x^*}, \\2(x^*)^2 - (x^*)^2 - 1 &= 0; \quad (x^*)^2 - 1 = 0; \quad x^* = \pm 1.\end{aligned}$$

Eftersom fixpunkterna är ± 1 och reella (och inte är rent imaginära) så får vi ingen konvergens.

Övning 5

Sätt upp Newtons metod för följande problem: a) $x^3 - 2x - 5 = 0$. b) $e^{-x} = x$. c) $x \sin x = 1$. b) Kör de tre metoderna med $x_0 = 1.5$ och skriv ut felen.

Lösning:

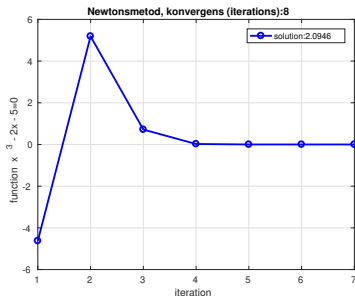
Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

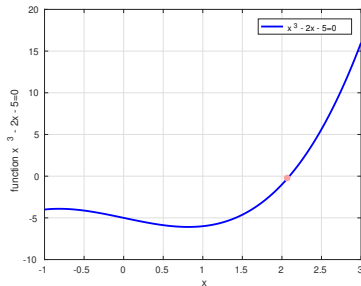
a) $f(x) = x^3 - 2x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 2$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2}.$$

Newtons metod för $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ med $x_0 = 1.5$, $tol = 10^{-15}$



a) Konvergens



b) Exakt funktion $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Sätt upp Newtons metod för följande problem:

b) $e^{-x} = x$.

Lösning:

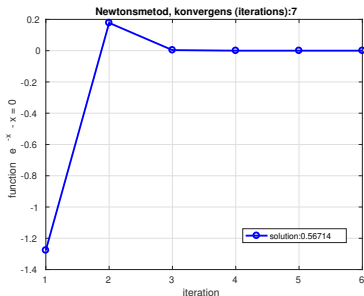
Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

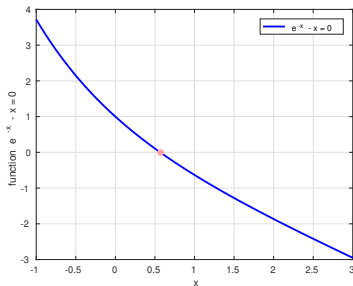
$f(x) = e^{-x} - x$, $f'(x) = -e^{-x} - 1$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1}.$$

Newtons metod för $f(x) = e^{-x} - x = 0$ med $x_0 = 1.5$, $tol = 10^{-15}$



a) Konvergens



b) Exakt funktion $f(x) = e^{-x} - x = 0$

Sätt upp Newtons metod för följande problem:

c) $x \sin x = 1$.

Lösning:

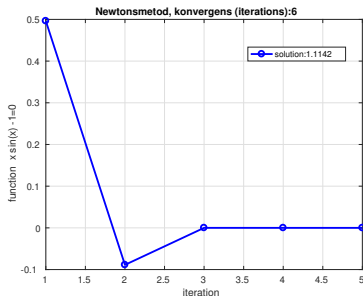
Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

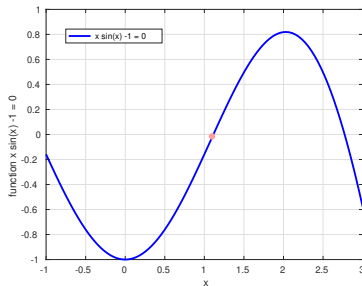
$f(x) = x \sin x - 1$, $f'(x) = \sin x + x \cos x$. Newtons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \sin x_k - 1}{\sin x_k + x_k \cos x_k}.$$

Newtons metod för $f(x) = x \sin x - 1 = 0$ med $x_0 = 1.5$, $tol = 10^{-15}$



a) Konvergens



b) Funktion $f(x) = x \sin x - 1 = 0$

Newtons metod används ibland för att implementera kvadratrotsfunktionen. a) Vi vill beräkna $\sqrt{y}$, sätt upp Newtons metod för problemet.

Lösning:

Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Vi har: $x = \sqrt{y}$, här x är okänt, då $x^2 = y$ och vi kan ta $f(x) = x^2 - y = 0$. Newtons metod för att lösa $f(x) = x^2 - y = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2x_k}.$$

Övning 7

Även division, $1/y$, kan implementeras med hjälp av Newtons metod. Formulera en lämplig ekvation och sätt sedan upp Newtons metod (som givetvis inte får innehålla någon division) för ekvationen.

Lösning:

Newtons metod är för att lösa $f(x) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Vi har: $x = 1/y$, här x är okänt, då $1/x = y$ och vi kan ta $f(x) = 1/x - y = 0$. Newtons metod för att lösa $f(x) = 1/x - y = 0$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1/x_k - y}{(-x_k^{-2})} = x_k + (1/x_k - y)(x_k)^2 \\ &= x_k + ((1 - yx_k)/x_k)(x_k)^2 = x_k + (1 - yx_k)x_k = x_k + x_k - yx_k^2 \\ &= 2x_k - yx_k^2 = x_k(2 - yx_k). \end{aligned}$$

Övning 9

Vi vill lösa ekvationen $x^2 - y = 0$ givet y och studerar därför fixpunktsiterationer, $x_{k+1} = g(x_k)$.

a) Är $g_1(x) = y + x - x^2$ respektive $g_2(x) = 1 + x - x^2/y$ lokalt konvergenta metoder om $y = 3$?

b) Hur ser den $g(x)$ ut som svarar mot Newtons metod?

Lösning:

Om vill lösa ekvationen $x^2 - y = 0$, då $x^2 = y$ och $x = \sqrt{y}$.

När $g_1(x) = y + x - x^2$ har vi: $g'_1(x) = 1 - 2x$ eller för $x = \sqrt{y}$ har vi: $g'_1(\sqrt{y}) = 1 - 2\sqrt{y}$. Om $y = 3$ då

$g'_1(\sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3}$, $|g'_1(\sqrt{3})| = |1 - 2\sqrt{3}| \approx 2.5 > 1$ och metoden $x_{k+1} = g_1(x_k)$ är ej konvergent.

För funktionen $g_2(x) = 1 + x - x^2/y$ har vi $g'_2(x) = 1 - 2x/y$ eller för $x = \sqrt{y}$ har vi: $g'_2(\sqrt{y}) = 1 - 2\sqrt{y}/y = 1 - 2/\sqrt{y}$. Om $y = 3$ då

$g'_2(\sqrt{3}) = 1 - 2/\sqrt{3} \approx 0.15 < 1$ och metoden $x_{k+1} = g_2(x_k)$ är konvergent. Fixpunkt: för exakt x^* vi ska lösa $g_2(x) : x^* = g_2(x^*)$ eller $g_2(\sqrt{y}) = 1 + \sqrt{y} - y/y = \sqrt{y}$. Vi kan skriva om den ekvation som $x^* = g_2(x^*)$ för $x^* = \sqrt{y}$, alltså $x^* = \sqrt{y}$ är fixpunkt.

b) Hur ser den $g(x)$ ut som svarar mot Newtons metod ?

Lösning:

Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k).$$

Nu har vi: $f(x) = x^2 - y = 0$, $f'(x) = 2x$. Newtons metod är:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2x_k} = \underbrace{\frac{x_k}{2} + \frac{y}{2x_k}}_{g(x_k)}.$$

Så $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2x}$ och $g'(x) = 1/2 - \frac{y}{2x^2}$. För $x = \sqrt{y}$ har vi:

$g'_2(\sqrt{y}) = 1/2 - \frac{y}{2y} = 0 < 1$ och metoden $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - y}{2x_k}$ är konvergent.

Fixpunkt: för exakt x^* vi ska lösa $g_2(x) : x^* = g(x^*)$ eller

$$x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{y}{2x^*}.$$

För $x^* = \sqrt{y}$ har vi:

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$$

och $x^* = \sqrt{y}$ är fixpunkt.

Övning 10

Formulera Newtons metod för följande två problem:

a)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0, \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod för system är:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k))^{-1} f(x_k),$$

var $J(f(x_k))^{-1}$ är inversa Jacobianen.

Lösning: Newtons metod för system:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k)^{-1})f(x_k),$$

var $J(f(x_k)^{-1})$ är inversa Jacobianen.

a)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Vi har för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k & 2x_2^k \\ 2x_1^k & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 - 1 \\ (x_1^k)^2 - (x_2^k) \end{bmatrix}$$

Lösning: Newtons metod för system är:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k))^{-1}f(x_k),$$

var $J(f(x_k))^{-1}$ är inversa Jacobianen.

a)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2^3 - 9 = 0, \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Vi har för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2^3 - 9 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2 - x_2^3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod för $x = (x_1, x_2)^T$ blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k + (x_2^k)^3 & 3x_1^k(x_2^k)^2 \\ 3x_2^k \cdot 2x_1^k & 3(x_1^k)^2 - 3(x_2^k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 + x_1^k(x_2^k)^3 - 9 \\ 3(x_1^k)^2x_2^k - (x_2^k)^3 - 4 \end{bmatrix}$$

Tag ett steg av Newtons metod för problemet:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1x_2 = 1. \end{cases}$$

Newtons metod för system är:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k))^{-1}f(x_k),$$

var $J(f(x_k))^{-1}$ är inversa Jacobianen.

Lösning:

Newtons metod för system är:

$$x_{k+1} = x_k - J(f(x_k))^{-1}f(x_k),$$

var $J(f(x_k))^{-1}$ är inversa Jacobianen.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1x_2 = 1. \end{cases}$$

Vi har för $f = (f_1, f_2)^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Newtons metod för $x = (x_1, x_2)^T$ blir då

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1^k & -2x_2^k \\ 2x_2^k & 2x_1^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (x_1^k)^2 - (x_2^k)^2 \\ 2x_1^k x_2^k - 1 \end{bmatrix}$$

För $x^0 = (0, 1)^T$ Newtons metod är:

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Övning 12

Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration, $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis-skiss för att vi får linjär konvergens om $g'(x^*) \neq 0$.

Lösning:

Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(\Theta_k)(x_k - x^*) \right) - x^* \\ &= \underbrace{g'(\Theta_k)}_{\neq 0} (x_k - x^*), \quad \Theta_k \in (x^*, x_k) \end{aligned}$$

så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = |g'(\Theta_k)|.$$

Om g

"är tillräckligt snäll" kommer $|g'(\Theta_k)| < C < \infty$ då $k \rightarrow \infty$ vi har minst linjär konvergens som konvergerar mot $g'(x^*) \neq 0$.

Övning 12

Givet en lokalt konvergent fixpunktsiteration, $x_{k+1} = g(x_k)$. Ge en bevis-skiss för att vi får kvadratisk konvergens om $g'(x^*) = 0$.

Lösning:

Från Taylors formel för $\Theta_k \in (x^*, x_k)$

$$\begin{aligned}x_{k+1} - x^* &= \left(\underbrace{g(x^*)}_{x^*} + g'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2}g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \right) - x^* \\&= \underbrace{g'(x^*)}_{0}(x_k - x^*) + \frac{1}{2}g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2 \\&= \frac{1}{2}g''(\Theta_k)(x_k - x^*)^2, \quad \Theta_k \in (x^*, x_k)\end{aligned}$$

så att

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(\Theta_k)|}{2}$$

Om g

"är tillräckligt snäll" kommer $g''(\Theta_k) < C < \infty$ då $k \rightarrow \infty$ vi har minst kvadratisk konvergens.

Övning 13

Vi studerar Newtons med fix riktning (modifierad Newton):

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/d.$$

a) Vad måste d uppfylla för att metoden skall vara lokalt konvergent? b) Vad blir, i allmänhet, konvergensordningen? c) Finns det något värde på d så att vi fortfarande får kvadratisk konvergens?

Lösning:

a) $g(x) = x - f(x)/d$, $x_{k+1} = g(x_k)$. x^* är en fixpunkt, ty $g(x^*) = x^* - f(x^*)/d = x^*$ och $f(x^*) = 0$.

$$g'(x) = 1 - f'(x)/d,$$

För konvergens vi ska ha $|g'(x^*)| = |1 - f'(x^*)/d| < 1$. Ett sätt att skriva detta är $|d - f'(x^*)|/|d| < 1$, d måste alltså likna $f'(x^*)$ i denna relativa mening.

b) Vi kommer normalt att få linjär konvergens. Se föregående övning.

c) Om $d = f'(x^*)$ har vi minst kvadratisk konvergens, ty $g'(x^*) = 1 - f'(x^*)/d = 0$. Se föregående övning.

Övning 14

Vi vill lösa $x^2 - x - 2 = 0$ och studerar följande fixpunktsiterationer:

- a) $g_1(x) = x^2 - 2$,
- b) $g_2(x) = \sqrt{x + 2}$,
- c) $g_3(x) = 1 + 2/x$,
- d) $g_4(x) = (x^2 + 2)/(2x - 1)$.

Analysera konvergensen mot $x = 2$.

Lösning:

Alla funktionerna har 2, -1 som fixpunkter. Räknar fixpunkter:

- a) $x^* = g_1(x^*) \rightarrow x^* = (x^*)^2 - 2 \rightarrow (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \rightarrow x_{1,2}^* = 2; -1$;
- b) $x^* = g_2(x^*) = \sqrt{x^* + 2} \rightarrow (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \rightarrow x_{1,2}^* = 2; -1$;
- c) $x^* = g_3(x^*) = 1 + 2/x^* \rightarrow (x^*)^2 - x^* - 2 = 0 \rightarrow x_{1,2}^* = 2; -1$.

Vi ska analysera konvergensen mot $x = 2$. Det återstår att undersöka derivatorna.

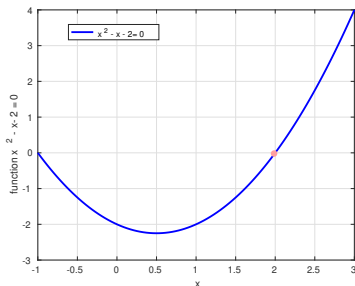
- a) $g_1' = 2x$, $|g_1'(2)| = 2^2 = 4 > 1$ -ingen konv.
- b) $g_2' = 1/(2\sqrt{x + 2})$, $|g_2'(2)| = (1/2)/\sqrt{2 + 2} = 1/4 < 1$. Konvergent.
- c) $g_3' = -2/x^2$, $|g_3'(2)| = 1/2$. Konvergent.
- d) $|g_4'(x)| = (x^2 + 2)'(2x - 1) - (x^2 + 2)(2x - 1)' / (2x - 1)^2 = (2x(2x - 1) - 2(x^2 + 2)) / (2x - 1)^2$, så $|g_4'(2)| = 0$. Konvergent.

Övning 14

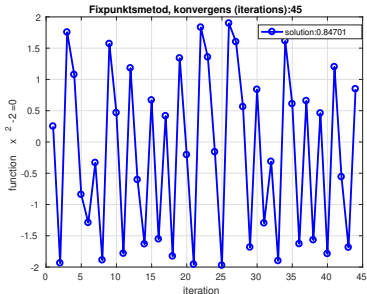
Vi testar programmet FixPunktIterExer5P14.m

Bilden nedan visar exakt $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ och

konvergenshastigheterna för g_1 med $x_0 = 1.5$, $tol = 10^{-15}$. Vi ser att g_1 är divergent.



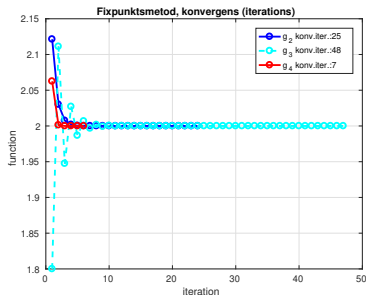
a) exakt $x^2 - x - 2 = 0$



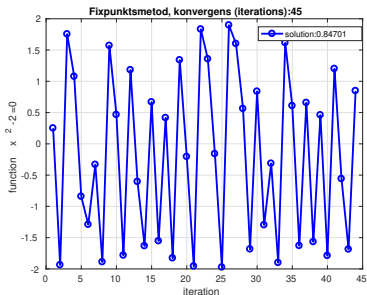
b) g_1

Övning 14

Bilden nedan visar konvergenshastigheterna med $x_0 = 2.5$, $tol = 10^{-15}$. Vi ser att g_1 är divergent, g_2 och g_3 konvergerar linjärt, g_4 slutligen är kvadratisk konvergent, se övningen ovan.



a) g_2, g_3, g_4



b) g_1

Övning 15

Försök att hitta så många rötter som möjligt till systemet:

$$\begin{cases} \sin(x) + y^2 + \log(z) = 3, \\ 3x + 2^y - z^3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^3 = 6. \end{cases}$$

Lösning:

Newtons metod blir:

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos x^k & 2y^k & \frac{1}{z^k} \\ 3 & 2^{y^k} \ln 2 & -3(z^k)^2 \\ 2x^k & 2y^k & 3(z^k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot f^k,$$

$$f^k = \begin{bmatrix} \sin x^k + (y^k)^2 + \log z^k - 3 \\ 3x^k + 2^{y^k} - (z^k)^3 \\ (x^k)^2 + (y^k)^2 + (z^k)^3 - 6 \end{bmatrix}.$$