1. Övningar: kap. 1, övn. 2:

Övning 2

Hur känslig är rötterna till ekvationen $x^2-3x+2=0$ för ändringar i -3 och 2?

Svar: från föreläsning 2 vi vet:

$$\boxed{|\delta r| \leq \frac{|\delta a\, r| + |\delta b|}{|2r+a|}} \quad (*)$$

för ekvationen $x^2+ax+b=0$

För eku. $x^2 \underbrace{-3}_{a}x \underbrace{+2}_{b}=0$ har vi:

$a=-3$; $b=2$. När vi löser ekvation $x^2-3x+2=0$, får vi 2 rötter:

$x_1=1$; $x_2=2$. I övningen: $\delta a = 3\cdot10^{-4}$, $\delta b = 2\cdot10^{-4}$.

Först använder $(*)$ för $r_1=x_1=1$:

$$|\delta r_1| \leq \frac{|3\cdot10^{-4}\cdot1| + |2\cdot10^{-4}|}{|2\cdot1-3|} = 5\cdot10^{-4}$$

För $r_2=x_2=2$ $(*)$ ska vara:

$$|\delta r_2| \leq \frac{|3\cdot10^{-4}\cdot2|+|2\cdot10^{-4}|}{|2\cdot2-3|} = 8\cdot10^{-4}$$

Och relativa förändringar:

$$\frac{|\delta r_1|}{|r_1|} \leq \frac{5\cdot10^{-4}}{|1|} = 5\cdot10^{-4}; \quad \frac{|\delta r_2|}{|r_2|} \leq \frac{8\cdot10^{-4}}{|2|} = 4\cdot10^{-4}$$

För $\tilde{r} = \begin{bmatrix} 1.0005 \\ 1.9992 \end{bmatrix}$

Relativa felet:

$$e_{r_1} = \frac{|r_1 - \tilde{r}_1|}{|r_1|} = \frac{|1 - 1.0005|}{|1|} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$e_{r_2} = \frac{|r_2 - \tilde{r}_2|}{|r_2|} = \frac{|2 - 1.9992|}{|2|} = 4 \cdot 10^{-4}$$

Vi har:

Uppskattning: Beräknad:

$$\frac{|\delta r_1|}{|r_1|} \leq 5 \cdot 10^{-4}; \quad e_{r_1} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{|\delta r_2|}{|r_2|} \leq 4 \cdot 10^{-4}; \quad e_{r_2} = 4 \cdot 10^{-4}$$

Kap. 1, Övn. 23

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$a >> b$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$r = x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$R = x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$r = -\frac{a}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}_{\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{4b}{a^2}\right)} \;=\; \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}} = \frac{a}{2}\left[-1 + 1 - \frac{2b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^4}\right.$$

Kap. 1, Övn. 25

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Proof:

$$\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \to \text{använder Lopital's rule}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'_x}{(x)'_x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} =$$

$$= 1$$

Taylorutv.: $\boxed{F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots}$

$$F(x) = e^x; \quad F_x'(x_0) = e^{x_0}\Big|_{x_0 = 0} = 1$$

$$F_x''(x_0) = e^{x_0}\Big|_{x_0 = 0} = 1$$

Taylorutv. för e^x:

$$\boxed{e^x \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots}$$