Numerisk Analys, MMG410. Lecture 2.

Konditionstal

Vi kan betrakta rötterna r som funktioner $f(c)$ av koefficienterna c:

$$r = f(c)$$

När vi stör koefficienterna $c + \delta c$, då stör vi också rötterna $r + \delta r$
Om liten relativ ändring av indata $|\delta c|/|c|$ ger en liten relativ ändring av resultatet $|\delta r|/|r|$ säger man att det aktuella problemet är välkonditionerat.
Om resultatet ändrar sig mycket är problemet illakonditionerat.
Konditionstalet är kvoten mellan de relativa förändringarna, dvs.

$$k = \frac{|\delta r|/|r|}{|\delta c|/|c|}$$

Stabilitet

Att beräkna konditionstalet är inte alltid möjligt; det kan vara lika svårt som att lösa det egentliga problemet. För vissa problemtyper är det överkomligt. Ibland är det dock möjligt att konstruera en uppskattning k så att

$$|\delta r|/|r| \leq k|\delta c|/|c|.$$

Det räcker att känna till storleksordning på k. Är $k \approx 10$ eller är $k \approx 10^8$?

Example

Hur känsliga är rötterna, till ekvationen $x^2 + ax + b = 0$, för ändringar i a och b? Rötterna r_1 och r_2 är funktioner av a och b: $r_1(a, b), r_2(a, b)$. Låt $r = (r_1, r_2)$ beteckna en av rötterna och låt $r + \delta r$ beteckna den störda roten när vi ändrar koefficienterna med δa respektive δb.

Example

Vi har sambandet:

$$x^2 + ax + b = (r + \delta r)^2 + (a + \delta a)(r + \delta r) + (b + \delta b) = 0,$$

och vi kan skriva om den:

$$(r^2+ar+b)+(\delta r(2r+a)+\delta ar+\delta b)+((\delta r)^2+\delta a\delta r) = I_1+I_2+I_3 = 0,$$

var

$$\begin{aligned} I_1 &= (r^2 + ar + b) = 0, \\ I_2 &= (\delta r(2r + a) + \delta ar + \delta b) \approx 0, \\ I_3 &= ((\delta r)^2 + \delta a\delta r) \approx 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Example

Från andra ekvation i systemet (1) får vi:

$$\delta r \approx -\frac{(\delta a\ r + \delta b)}{2r + a}$$

eller

$$|\delta r| \leq \frac{(|\delta a\ r| + |\delta b|)}{|2r + a|} \tag{2}$$

Eftersom r_1 och r_2 är rötter så gäller att:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = x^2 + ax + b$$

Vi kan jämföra koefficienterna och får

$$-(r_1 + r_2) = a,\ \ b = r_1 r_2.$$

Vi kan skriva om $r_1 - r_2 = 2r_1 + a$, och definera gapet $g := |r_1 - r_2|$.

Example

Vi kan skriva om (2)

$$|\delta r| \leq \frac{|\delta a\ r| + |\delta b|}{|g|} \tag{3}$$

Vi ser att om g är liten eller $r_1 \approx r_2$, då $|\delta r|$ är stort.
Vi vill konstruera uppskattning i formen

$$|\delta r|/|r| \leq k|\delta c|/|c|.$$

Dividera (3) med $|r|$ och förläng med $|a|$ respektive $|b|$.

$$\frac{|\delta r|}{|r|} \leq \frac{1}{|r|}\left(\frac{\frac{|a|}{|a|}|\delta a\ r| + \frac{|b|}{|b|}|\delta b|}{|g|}\right) \leq k \max\left(\frac{|\delta a|}{|a|}, \frac{|\delta b|}{|b|}\right), \tag{4}$$

var konditionstalet är $k \approx \frac{|a|+|b/r|}{g}$.
Observera att detta är en uppskattning av konditionstalet. Det är inte heller beräkningsbart eftersom vi måste känna r_1 och r_2.

Example

Låt

$$p(x) = (x-1)(x-1.0001) = x^2 - 2.0001x + 1.0001$$

Vi vet sedan tidigare att konditionstalet $k \approx \frac{|a|+|b/r|}{g}$ med gapet $g := |r_1 - r_2|$ har storleksordningen $1/(1.0001-1) = 10^4$:

$$k \approx \frac{|-2.0001| + |1.0001/r|}{|1.0001-1|} \approx 3 \cdot 10^4.$$

Antag att vi på något sätt har producerat de dåliga approximativa rötterna 1.11 och 0.895. De relativa felen är ungefär 11%. Det störda polynomet (som har rötterna 1.11 och 0.895) är:

$$(x-1.11)(x-0.895) = x^2 - 2.005x + 0.99345$$

Detta innebär att vi har löst nästan rätt problem; vi har gjort ett relativt bra jobb med att beräkna rötterna. Att våra rötter är dåliga approximationer beror på att problemet är illakonditionerat.

Framåt- och Bakåtanalys

Vad händer när vi stör koefficienterna c (indata i det allmänna fallet) med δ_c ? Vi har sett s.k. framåtanalys: givet δc vad blir

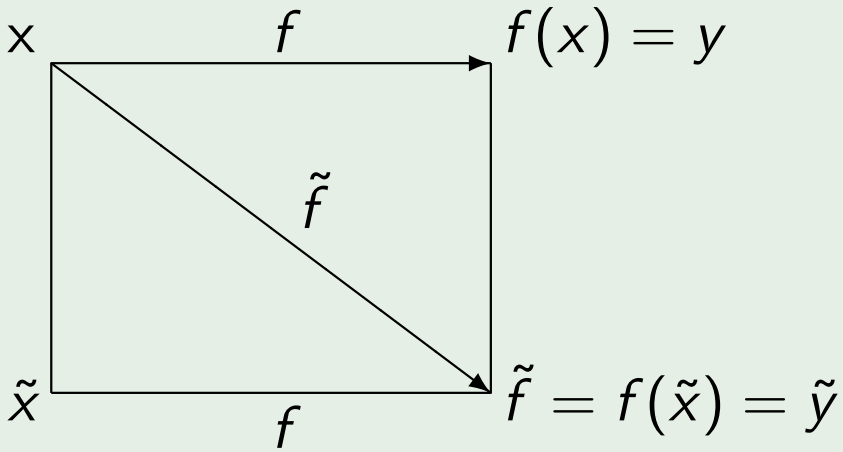
$$\tilde{y} - y = f(c + \delta c) - f(c),$$

var $\tilde{y} = f(c + \delta c), y = f(c)$. Detta kan, som vi har sett, ge väldigt pessimistiska svar. Ett alternativ är följande: givet approximationen $\hat{r}$ till det exakta värdet r hur mycket måste vi ändra c för att $\hat{r}$ skall bli en exakt lösning till det störda problemet? Vi söker alltså δc sådant att

$$f(c + \delta c) = \hat{r}.$$

Man kallar detta bakåtanalys. Detta på grund av att vi tittar på indatasidan i stället för på resultatsidan.

Example



Framåtfelet: $|y - \tilde{y}|$; Bakåtfelet: $|x - \tilde{x}|$;
$f(x) = \sqrt{x} = y$; $f(\tilde{x}) \approx \sqrt{2} \approx 1.4 = \tilde{y}$
Låt $y = 1.41421\ldots$
Framåtfelet: $|y - \tilde{y}| = |1.4 - 1.41421| \approx 0.014 \approx 1\%$
Bakåtfelet: $(1.4)^2 = 1.96 = \tilde{x}$,
$\sqrt{1.96} = 1.4$ och $|x - \tilde{x}| = |1.96 - 2| = 0.04 \approx 4\%$

Diskretiseringsfel och avrundningsfel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- För stora h dominerar diskretiseringsfelet, man kan bortse från avrundningsfelet.
- För små h dominerar avrundningsfelet.
  Se approximation av $f'(x)$: kancellation i täljaren för små h och division med litet tal förstärker felet i täljaren.

Diskretiseringen för $f'(x)$: första ordningen noggrannhet

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(Q)h^2}{2!},$$

$Q \in [x, x+h]$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(Q)h^2}{2!}.$$

Dividera med h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(Q)h}{2!}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(Q)h}{2!}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Trunkeringsfel för $f'(x)$

Trunkeringsfel:

$$\frac{f''(Q)h}{2} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Låt $M \leq |f''(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med

$$\varepsilon < \frac{Mh}{2}.$$

Vi fick för $f'(x)$ första ordning noggrannhet.

Diskretiseringen för $f'(x)$: andra ordning noggrannhet.

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$(*)\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(Q)h^3}{3!}$$

$$(**)\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - \frac{f'''(Q)h^3}{3!}$$

$(*) - (**)$:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f'''(Q)}{3!}h^3$$

$$2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) - 2\frac{f'''(Q)}{3!}h^3$$

Eller

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{2f'''(Q)h^3}{3! \cdot 2h}$$

Trunkeringsfel för $f'(x)$: andra ordning noggrannhet.

Trunkeringsfel:

$$\frac{2f'''(Q)h^3}{3! \cdot 2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x).$$

Låt $M \leq |f'''(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med

$$\varepsilon < \frac{Mh^2}{6}.$$

Vi fick för $f'(x)$ andra ordning noggrannhet.

Diskretiseringen för $f''(x)$: andra ordning noggrannhet.

Approximativt värde (Taylor's theorem):

$$(*)\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} - \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \dots$$

$$(**)\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \dots$$

$(*) + (**)$:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2f''(x)}{2!}h^2 + O(h^4)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - O(h^4)}{h^2}$$

$O(h^4) = \frac{2f^{(4)}(x)}{24}h^4$; $\frac{f^{(4)}(x)}{12}\frac{h^4}{h^2} = \frac{f^{(4)}(x)}{12}h^2 \longrightarrow$ Låt $M \leq |f^{(4)}(Q)|$, då trunkeringsfel ε är begränsad med $\varepsilon < \frac{Mh^2}{12}$, och $f''(x)$ har andra ordningen noggrannhet.

Representation av tal i dator

- Alla tal lagras i ett begränsat antal bitar i minnet, vanligen i binär form.
- För heltal: lagring i dator är utan problem. Heltal upp till en viss storlek lagras exakt.
- Reella tal lagras exakt utan måste avrundas. Representation av reella tal kallas flyttalsrepresentation och talen kallas flyttal.

IEEE flyttalsrepresentation

IEEE 754 (Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.) definierar enkel och dubbel precision (bland annat).

- Under 60- och 70-talen hade varje datortillverkare sitt eget flyttalsystem.
- En flyttalstandard utvecklades under tidigt 80-tal och följdes av tillverkare som Intel och Motorola.
- IEEE standarden har 3 viktiga krav: konsistent flyttalsrepresentation, korrekt avrundningsaritmetik, konsistent hantering av exceptionella situationer.

Flyttalsaritmetik

Flyttal (tal med flytande decimalpunkt):

$$x = \pm \left(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + ... + \frac{d_{t-1}}{\beta^{t-1}} \right) \beta^e,$$

var

$$0 \leq d_k \leq \beta - 1, L \leq e \leq U,$$

Här:

- β bas (s vi kommer att ha $\beta = 2$)
- e exponent (heltal)
- t precision
- $[L, U]$ exponentomfång
- $d_k, k = 0, ..., t - 1$ mantissa (heltal)

Vi antar att $= 2$ från och med nu:

bas	t	L	U	
2	24	-126	127	32 bitar
2	53	-1022	1023	64 bitar

Flyttalsaritmetik

- IEEE enkel precision: tecknet ("+" 0, "-" 1) 1 bit, exponent 8 bitar, mantissa 23 bitar = 32 bitar:

$$\pm e_1 e_2 ... e_8 d_0 d_1 ... d_{22}$$

- IEEE dubbel precision: tecknet ("+" 0, "-" 1) 1 bit, exponent 11 bitar, mantissa 52 bitar = 64 bitar:

$$\pm e_1 e_2 ... e_{11} d_0 d_1 ... d_{51}$$

Ett tal $\neq 0$ är normaliserat om $d_0 \neq 0$.
Om $\beta = 2$ så är $d_0 = 1$ varför man inte lagrar d_0.
Det finns speciella bitformat för diverse specialfall, t.ex:
[0, -0]
ans = 0000000000000000 8000000000000000

bas	t	L	U	
2	24	-126	127	32 bitar
2	53	-1022	1023	64 bitar

Antalet olika tal räknas som:

$$2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$$

och är

- $4.2614 \cdot 10^9$ i enkel precision: $\beta = 2, L = -126, U = 127, t = 24$ i formula $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$.
- $1.8429 \cdot 10^{19}$ i dubbel precision: $\beta = 2, L = -1022, U = 1023, t = 53$ i formula $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1$.

- Att testa en funktion för alla flyttal i dubbel precision är nästan omöjligt. 109 tester per sekund ger 584.4 år.

bas	t	L	U	
2	24	-126	127	32 bitar
2	53	-1022	1023	64 bitar

- Minsta positiva representerbara normaliserade talet är $2^L \approx 1.1710^{-38}$ i enkel (se tabell, $L = -126$) och $\approx 2.2 \cdot 10^{-308}$ i dubbel precision (se tabell, $L = -1022$).
- Det största representerbara talet har största exponenten och ettor i hela mantissan. I enkel precision $\approx 3.4 \cdot 10^{38}$, i dubbel $\approx 1.8 \cdot 10^{308}$.
- Tal större än största representerbara talet ger overflow och mindre än minsta positiva representerbara normaliserade talet ger underflow.
- Underflow Level: $UFL = \beta^L$, Overflow Level: $OFL = \beta^{U+1}(1 - \beta^{-t})$. I enkel precision OFL räknas som: $OFL = (2^{128}) \cdot (1 - (2^{-24})) \approx 3.4 \cdot 10^{38}$, i dubbel OFL räknas som: $OFL = (2^{1024}) \cdot (1 - (2^{-53})) \approx 1.8 \cdot 10^{308}$.
- Exempel: Matlab programet floatgui.m. Floating-point system: $\beta = 2, p = 3, L = -1, U = 1$. Antalet flytttal: $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U - L + 1) + 1 = 25$.

Example

När vi skriver i Matlab:

- $1e-200^2 = 10^{-200^2}$ ger underflow, svar 0.
- $1e200^2$ ger overflow, svar infinity.
- *log*(0), svar -infinity
- sin(1/0), svar NaN (not a number)
- exp(log(10000)) − log(exp(10000)), *svar* :exp(log(10000)) = 10000, exp(10000) = Inf och log(exp(10000)) = Inf och exp(log(10000)) − log(exp(10000)) = −Inf
- exp(log(10)) − log(exp(10)), svar: exp(log(10)) = 10, log(exp(10)) = 10 och exp(log(10000)) − log(exp(10000)) = 0.

Skriv talet i binär form som flyttal i dator.

Flyttal (tal med flytande decimalpunkt):

$$x = \pm \left(d_0 + \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{d_{t-1}}{\beta^{t-1}} \right) \beta^e,$$

Example

$$-3.25: \quad -[1.625] \cdot 2^1 = -\underbrace{[1 + 0.625]}_{\textit{mantissa}} \cdot 2^1$$

Exponenten $e = 1$ lagras som: $1 + 1023 = 1024 = 2^{10}$. Mantissa: 1 kodas inte,

$$0.625 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{16}x_4 + \ldots = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \ldots$$

$\frac{1}{2} = 0.5 < 0.625$; $\frac{1}{4} = 0.25 : 0.625 - 0.5 = 0.125; 0.25 > 0.125$, darför $\frac{1}{4} \cdot 0$, $\frac{1}{8} = 0.125 = 0.125$ och darför $\frac{1}{8} \cdot 1$ och stop (resten i mantissa ska vara 0).

Vi får följande binär representation för -3.25 :

1	10000000000	1010 0
tecken	exponent 11 bitar	mantissa 52 bitar

Example

-3.25 i binär form lagras som:

1	10000000000	1010 0
tecken	exponent 11 bitar	mantissa 52 bitar

-3.25 i hexadecimalt (bas 16) form lagras som:

c00a000000000000

Bas 16:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
										a	b	c	d	e	f

Nu grupperar vi om binär form för -3.25 i 4 bitar:

1100	0000	0000	1010	0000	....	0000

och kodar första fyra bitar: $\boxed{1100} = c$

$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 12 = c$

0000 koderas som 0, och sedan

$\boxed{1010} = a$

$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10 = a$

Example

$-9.28 := -[1.16] \cdot 2^3 = -[1 + 0.16] \cdot 2^3$

$$0.16 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{16}x_4 + \frac{1}{32}x_5 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 0 + \ldots$$

Exponenten 3 lagras som: $3 + 1023 = 1026 = 1024 + 2 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

1	10000000010	00101 ....
tecken	exponent 11 bitar	mantissa 52 bitar

$\frac{1}{2} = 0.5 > 0.16$, darför $\frac{1}{2} \cdot 0$, $\frac{1}{4} = 0.25 : 0.25 > 0.16$, darför $\frac{1}{4} \cdot 0$, $\frac{1}{8} = 0.125 < 0.16$ och darför $\frac{1}{8} \cdot 1$, $\frac{1}{16} = 0.0625 : 0.16 - 0.125 = 0.035, 0.0625 > 0.035$, och darför $\frac{1}{16} \cdot 0$, $\frac{1}{32} = 0.0312 : 0.0312 < 0.035$, och darför $\frac{1}{32} \cdot 1$, och så vidare ...

Example

$-9.28 := -[1.16] \cdot 2^3 = -[1 + 0.16] \cdot 2^3$

Kollar i Matlab:

```
q = quantizer('double');
y = num2bin(q,-9.28)
y =
1100000000100010100011110101110000101000111101011100001010001
```

Obs: uppe finns inte plats for y på sliden, vi ska ha:

```
y =
11000000001000101000111101011100001010001111010111000010100011111
```

Example

$6.28 = +[1.57] \cdot 2^2 = +[1 + 0.57] \cdot 2^2$

$$0.57 = \frac{1}{2} + 0.07 =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{256} + \ldots$$

Exponenten 2 lagras som: $2 + 1023 = 1025 = 1024 + 1 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^0$

0	10000000001	10010 ....10...
tecken	exponent 11 bitar	mantissa 52 bitar

I Matlab:

y = num2bin(q,6.28)

y =

0100000000011001000111101011100001010001111010111000010100011

Syns inte sista siffror: y =

0100000000011001000111101011100001010001111010111000010100011111

Flyttal-räkning

Om x är ett godtyckligt reellt tal betecknar vi det avrundade flyttalet med $fl(x)$ (floating). Normalt (kan ändras) är fl(x) det flyttal som ligger närmast x.

Example

Exempel: Låt oss anta att vi räknar decimalt med fyra siffror.

$$\begin{aligned} fl(\pi) &= fl(3.141592653589...) = 3.142, \\ fl(31415926.53589...) &= 3.142 \cdot 10^7. \end{aligned} \tag{5}$$

Hur stort kan det absoluta felet bli vid avrundning till närmaste flyttal? Maximalt en halv enhet i fjärde siffran. Så om vårt tal är

$$\pm s_1 . s_2 s_3 s_4 ... 10^e$$

(där $s_1, s_2, ...$ betecknar decimala siffror) är absolutbeloppet av absoluta felet maximalt $0.0005 \cdot 10^e$. Relativa felet är maximalt (för ett normaliserat tal)

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq \frac{0.0005 \cdot 10^e}{1.0000.... \cdot 10^e} = 0.0005$$

Denna begränsning kallas relativa maskinnoggrannheten

Maskinnoggrannheten ε_{mach}

ε_{mach} beror på method, som vi använder i avrundning. Definitioner för ε_{mach} för precision t:

- I rounding by choping:

$$\varepsilon_{mach} = \beta^{1-p} = \beta^{-t}$$

- I rounding to nearest:

$$\varepsilon_{mach} = \frac{1}{2}\beta^{1-p} = \frac{1}{2}\beta^{-t}$$

I dubbel precision (när $t = 53$, 64 bits dator) gäller att $\varepsilon_{mach} = 2^{-t} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$ och i enkel precision (när $t = 24$, 32 bits dator) $\varepsilon_{mach} = 2^{-t} \approx 6 \cdot 10^{-8}$.

Example

	chop rounding to 2 digits	to nearest to 2 digits
1.849	1.8	1.8
1.850	1.8	1.9
1.851	1.8	1.9
1.899	1.8	1.9