Numerisk Analys, MMG410. Lecture 5.

Matrisfaktoriseringar: Choleskyfaktorisering $A = L \cdot L^T$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} \\ 0 & \ell_{22} \end{bmatrix}}_{L^T} = \begin{bmatrix} \ell_{11}^2; & \ell_{11} \cdot \ell_{21} \\ \ell_{21} \cdot \ell_{11}; & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

$$\ell_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\ell_{11} \cdot \ell_{21} = a_{12} \Rightarrow \ell_{21} = \frac{a_{12}}{\ell_{11}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$\ell_{21} \cdot \ell_{21} + \ell_{22} \cdot \ell_{22} = a_{22}$$

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}};$$

Räkna Choleskyfaktorisering $A = L \cdot L^T$ för

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Räkna Choleskyfaktorisering $A = L \cdot L^T$ för

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{bmatrix};$$

Är A s.p.d. ? Räknar egenvärden:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \approx 1.3 > 0 \\ \lambda_2 \approx 27.7 > 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2;\ \ell_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{8}{2} = 4;\ \ell_{22} = \sqrt{25 - \frac{8^2}{4}} = 3.$$

$$A = L \cdot L^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tillämpningar av LU, LDL^T, DU, Cholesky faktoriseringar

1) Lösa system av linjära ekvationer $Ax = b$;
2) För att räkna inversa matriser.

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$
$$A = DU \Rightarrow A^{-1} = (DU)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}D^{-1}$$
$$A = LL^T \Rightarrow A^{-1} = (LL^T)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = L^{-1}(L^T)^{-1} = L^{-1}(L^{-1})^T$$

3) För att beräkna determinant av $dim(A) = n \times n$:

$$A = LU \Rightarrow det(A) = det(LU) = det(L) \cdot det(U) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \prod_{i=1}^{n} u_{ii},$$
$$A = PLU \Rightarrow det(A) = det(P)det(L) \cdot det(U) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \prod_{i=1}^{n} u_{ii},$$
$$A = LL^T \Rightarrow det(A) = det(LL^T) = det(L) \cdot det(L^T) = (det(L))^2.$$

s = hur många gånger var gjort permutation.

Beräkning av inversa matris med hjälp av *DU* faktorisering

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = 2;\ d_{22} = a_{22} = 3;\ u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Hur ska vi räkna inversen på U ?

Example

Observera, att

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

Vi ska använda formula : $(I+N)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k N^k$.
Härledning: N är triangular med 0 på diagonalen, då $N^n = 0$. Från polynomial faktorizering: $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$. För $x = -N$ vi har:
$(I+N)(I - N + N^2 - N^3 + ... + (-1)^{n-1}N^{n-1}) = (I - N^n) = I$ och
$(I+N)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k N^k$.

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{2-1}(-1)^k N^k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-N) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Example

Vi kan beräkna nu A^{-1}

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Positivt definit matris

Positivt definit matris: $x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$.
Exempel: en symmetrisk, positivt definit matris har positiva egenvärden.
Bevis: En reell och symmetrisk matris har reella egenvärden och egenvektorer

$$Ax = \lambda x \Rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x \Rightarrow \lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x} > 0,$$

och $x^T x > 0, x \neq 0$. Omvändningen gäller också: en reell, symmetrisk matris är positivt definit om den har positiva egenvärden.

Positivt definit matris

Example

En positivt definit matris har positiva diagonalelement. Tag $x = e_j$, kolonn j i I, enhetsmatrisen. Då är (med Matlabnotation)

$$Ae_j = A(:, j), e_j^T A = A(j, :), e_j^T Ae_k = A(j, k) = a_{j,k}$$

Så

$$e_j^T Ae_j = a_{j,j} > 0, j = 1, ..., n$$

Observera implikationen. Positiva diagonalelement är nödvändigt för att vi skall ha en positivt definit matris. Det är inte ett tillräckligt villkor.

Example

$$[1, \ -1] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] = -2 < 0.$$

Matrisen är indefinit med egenvärden -1 och 3.

Diagonalelementen måste också vara tillräckligt stora jämfört med de utomdiagonala, för att matrisen skall vara positivt definit.

Positivt definit matris

Example

Låt A vara symmetrisk och positiv definit matris, dim $A = n \times n$. Använd definitionen på positivt definit för att bevisa att A är ickesingulär.
Svar:
Definition av s.p.d. matris är: $\forall x \neq 0 \;\; x^T Ax > 0$. Om A vore singulär ($detA = 0$)då skulle det existera $x \neq 0$ så att $Ax = 0$, men det strider mot antagande att A är positivt definit. Exempel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Vi kan välja $x_1 = -x_2$, då $Ax = 0$.

Positivt definit matris

Example

Ett exempel från flervariabelkursen. Låt $z = f(x, y)$ vara en reellvärd funktion av två variabler. Vi vill undersöka om f har ett strängt lokalt minimum i punkten (a, b). Om f är tillräckligt snäll (har tillräckligt många kontinuerliga derivator) gäller att:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \\ \frac{f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2}{2} + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Ett nödvändigt villkor för minimum är att gradienten är nollvektorn, ty annars kan vi göra f mindre genom att gå i negativa gradientens riktning. Alltså gäller:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2}{2} + \dots \tag{2}$$

Positivt definit matris

Example

Nu är (där vi inte skriver ut (a, b))

$$f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2 = f''_{xx}h^2 + f''_{xy}hk + f''_{yx}hk + f''_{yy}k^2 = \\ [h,\ k] \cdot \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = v^T H v \tag{3}$$

med

$$v = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}.$$

H är den s.k. Hessianen. Om H är positivt definit så har f ett strängt lokalt minimum i (a, b).

Detta gäller allmänt. Om $w = f(x, y, z)$ där $\nabla f(a, b, c)$ är nollvektorn, så har f ett strängt lokalt minimum i (a, b, c) om

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix}.$$

är positivt definit (alla derivator är beräknade i (a, b, c)).

Konditionstalet för $Ax = b$-problemet, Proof by example

Låt oss se hur lösningen x ändrar sig när vi stör högerledet b. Vi studerar ett numeriskt exempel där A är diagonal.

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 10^{10} \end{bmatrix}$$

Vi stör nu b med f och får då lösningen y, dvs. $Ay = b + f$. Hur mycket ändras x, dvs. hur stor är $y - x$?

$$y = A^{-1}(b + f) = A^{-1}b + A^{-1}f = x + A^{-1}f$$

så att

$$y - x = A^{-1}f = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5f_1 \\ 10^{10}f_2 \end{bmatrix}$$

Det är är inte alltid så här illa. Om vi i stället tar matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow y - x = B^{-1}f = \begin{bmatrix} 0.5f_1 \\ 10f_2 \end{bmatrix}$$

Konditionstalet för $Ax = b$-problemet, Proof by example

Slutsats: om A har ett eller flera diagonalelement nära noll, så kommer x att vara känslig för ändringar i högerledet. A är nästan singulär i följande mening:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -10^{-10} \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{singular}$$

- Den lilla störningen E (små element jämfört med det största elementet i A) gör A singulär. A ligger alltså nära en singulär matris.
- B är inte nästan singulär eftersom E måste innehålla ett stort element, -0.1.
- Allmänt gäller att x är känslig för störningar i b och A om A är nästan singulär. Om A är långt från att vara singulär, så är x relativt okänslig för störningar.

Konditionstalet för $Ax = b$-problemet, Proof by example

En nästan singulär matris har en invers där åtminstone något element är stort. Eftersom $y - x = A^{-1}f$ så kommer x att ändras mycket om A^{-1} innehåller stora element.

Om matrisen inte är diagonal får vi ett mer komplicerat uppträdande.

Antag att $\delta > 0$ är nära noll.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} 1+\delta & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vi ser att C^{-1} är proportionell mot $1/\delta$, så inversen är stor. C ligger också nära en singulär matris. Om vi subtraherar δ från $c_{2,2}$ så blir matrisen singulär ($detC \approx 0$ för $\delta \approx 0$). Detta gäller allmänt.
- Om C har element av storleksordningen ett $\Rightarrow$ storlek på $C^{-1} \approx 1/$ (avståndet till närmaste singulära matris).
- För att göra riktiga satser krävs mer matematik, vektor- och matrisnormer.

Vektornormer

En vektornorm är en funktion som ger ett mått på storleken på elementen i en vektor. Om vektorn innehåller n element så sammanfattar vi storleken med ett ickenegativt tal, så normer kan vara trubbiga mätverktyg. Det finns oändligt många normer. Vi kommer att använda tre så kallade L_p-normer som vi betecknar med $\|\cdot\|_p$:

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

- $p = 1, \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$ ettnormen
- $p = 2, \|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$, tvånormen
- $p = \infty, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$, maxnormen

Vektornormer

Dessa tre normer (liksom alla vektornormer) uppfyller:

- $x \neq 0 \rightarrow \|x\| > 0$ (positivitet), $\|0\| = 0$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ for alla $\alpha \in \mathbb{R}$ (homogenitet)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangelolikheten)

Normer är olika stora, men de är ekvivalenta (jämförbara). Det existerar positiva tal α och β som inte beror på x utan bara på n så att t.ex.

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

I detta fall är $\alpha = 1/\sqrt{n}, \beta = 1$. Olikheterna är skarpa, det existerar $x \neq 0$ där likhet antas. Varför räcker det inte med den vanliga längden av en vektor, dvs. det vi kallar tvånormen? Det beror på att olika problemställningar kräver olika sätt att mäta storlek. Dessutom kan det vara så att det går att skapa starkare satser för en viss norm.

Vektornormer

Normer är olika stora, men de är ekvivalenta (jämförbara).

Example

- $$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$
- $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$
- $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,,$$
- $$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty$$

Innerprodukt

Vi kan definiera en norm givet en innerprodukt (skalärprodukt).

$x \cdot y = (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x^T y, \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}.$
Notera att $x^T y$ är en skalär men xy^T är en matris.

Example

$$x^T y = [-1,\ 2,\ 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot (3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4.$$

$$xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [3,\ 2,\ 1] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Example

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} ||x||_1 &= |-1| + |2| + |3| + |-5| = 11 \\ ||x||_2 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{39} \end{aligned}$$

$||x||_\infty = max(|-1|, |2|, |3|, |-5|) = 5.$

En vektor x är normerad om $||x|| = 1$. Om $x \neq 0$ så är $\dfrac{x}{||x||}$ normerad.

$$x^T x = [-1,\ 2,\ 3,\ -5] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + (-5)^2 = 39$$

$||x||_2 = \sqrt{39}$

$$V = \frac{x}{||x||} = \left[\frac{-1}{\sqrt{39}}, \frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{3}{\sqrt{39}}, \frac{-5}{\sqrt{39}}\right]^T \implies ||V||_2 = 1$$

Matrisnormer

Matrisnormer är funktioner från $\mathbb{R}^{m\times n}$ till $\mathbb{R}$, eller $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ och uppfyller de tre vektornormsvillkoren ovan, eller:

- $\|A\| \geq 0$ (positivitet).
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ for alla $\alpha \in \mathbb{R}$ (homogenitet)
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (subadditivitet, triangelolikheten)

Om $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ användbara matrisnormer är submultiplikativa:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (submultiplikativitet)

Normer är olika stora, men de är ekvivalenta (jämförbara). Det existerar positiva tal α och β som inte beror på A att t.ex.

$$\alpha\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \beta\|A\|_1$$

Matrisnormer

Vi kan bilda matrisnormer utgående från vektornormer. En operatornorm mäter hur mycket multiplikation med en matris A kan förstora en vektor:

$$||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Vi noterar att $\|I\| = 1$ om $\| \cdot \|$ är en operatornorm.
Operatornormerna som svarar mot våra tidigare vektornormer:

- $p = 1$, ettnormen, största kolonnsumman

$$||A||_1 = \max_k \sum_{r=1}^{m} |a_{r,k}|$$

- $p = 2$, tvånormen,

$$||A||_2 = \max \sqrt{\lambda(A^T A)}$$

- $p = \infty$, maxnormen, största radsumman

$$||A||_\infty = \max_r \sum_{k=1}^{n} |a_{r,k}|$$

Matrisnormer

Example

För $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller:

- $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$
- $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$.
- $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

Matrisnormer

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} ||A||_1 &= \max(|1| + |6| + |9|, |-2| + |4| + \\ &+ |-6|, |-3| + |2| + |3|) = \\ &= \max(16, 12, 8) = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||A||_\infty &= \max(|1| + |-2| + |-3|, |6| + |4| + |2|, \\ &|9| + |-6| + |3|) = \max(6, 12, 18) = 18 \end{aligned}$$

Matrisnormer

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$||A||_2 = \max \sqrt{\lambda(A^T A)}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; A^T A = \begin{bmatrix} 118 & -32 & 36 \\ -32 & 56 & -4 \\ 36 & -4 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A^T A) = \begin{bmatrix} 8.9683 \\ 45.3229 \\ 141.7089 \end{bmatrix}; \quad \max \sqrt{\lambda(A^T A)} = \max(2.9947, 6.7322, 11.9042) = 11.9042$$

Matrisnormer

Example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0;$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1;\ ||A||_2 = \max \sqrt{\lambda(A^T A)} = \max(1,1) = 1$$

Example

Beräkna $\|A\|_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Svar: $\|A\|_2 := \max \sqrt{\lambda(A^T A)}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix},$$

och för att hitta $\lambda(A^T A)$ vi ska lösa ekvation $\lambda^2 - 35\lambda + 225 = 0$.
Egenvärden: $\lambda_1 = 8.4861, \lambda_2 = 26.5139$. $\sqrt{\lambda_1} = 2.9131, \sqrt{\lambda_2} = 5.1492$,
and $\|A\|_2 = \max(\sigma_1, \sigma_2) = (2.9131, 5.1492) = 5.1492$.

Matrisnormer

Example

Beräkna $||A||_\infty, ||A||_1, \|A\|_2$ för A

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar:

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sedan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 149 & -120 & -10 \\ -120 & 126 & 8 \\ -10 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Example

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

and $\lambda(A^T A) = (9.2592, 17.0342, 258.7066)$, $\sqrt{\lambda(A^T A)} =$ $(3.0429, 4.1273, 16.0844)$,och
$||A||_2 = \max(3.0429, 4.1273, 16.0844) = 16.0844$.
$||A||_1 = \max(|7|+|-10|+0, |-10|+5+1, 0+1+3) = \max(17, 16, 4) = 17$ (ettnormen, största kolonnsumman),
$||A||_\infty = 17$ (maxnormen, största radsumman).