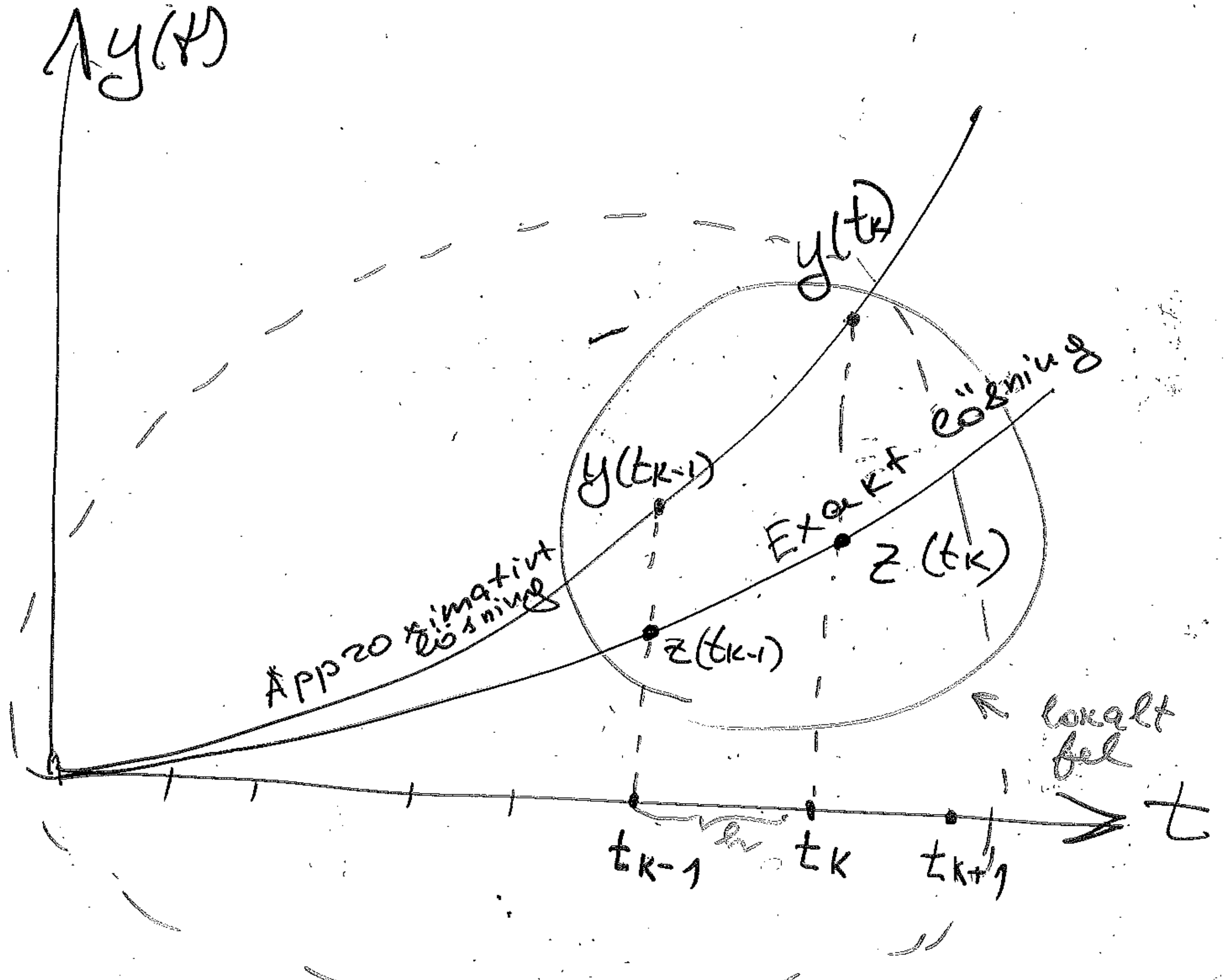
Felkällor

Approx. lösning: $y(t)$ —

Exakt lösning: $z(t)$ ——



Globalt fel: felet mellan approximativt y_k och exakt z_k lösning över hela beräknings-intervalet $[0, T]$.

ODE

$$(*)\quad \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(t_{k-1}) = y_{k-1} \end{cases}$$

Lösning: $y(t) = e^{\lambda t}$

$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \rightarrow$ sätt in

i $(*)$:

$$\cancel{\lambda e^{\lambda t}} = \cancel{\lambda e^{\lambda t}} \quad \text{OK}$$

Lösning:

$y(t_{k-1}) = y_{k-1} \rightarrow y(t_{k-1}) = e^{\lambda \cdot t_{k-1}} \cdot \text{Const}$

$(**)\quad y(t) = \text{Const}\, e^{\lambda t} \rightarrow$ lösning av $(*)$

$$\text{Const} = y(t_{k-1}) \cdot e^{-\lambda t_{k-1}}$$

Sätt i $(**)$:

$$y(t) = y(t_{k-1}) \cdot e^{-\lambda t_{k-1}} \cdot e^{\lambda t} =$$

$$= y(t_{k-1}) \cdot e^{\lambda(t - t_{k-1})}$$

Globala felet $y_k - y(t_k)$

$$(*)\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightarrow y(t) = Ce^{\lambda t};\ y' = C\lambda e^{\lambda t} \rightarrow C\lambda e^{\lambda t} = \lambda Ce^{\lambda t}$$

Lösning: $y = Ce^{\lambda t}$

$y(0) = y_0 \rightarrow y(0) = Ce^{\lambda \cdot 0} = y_0$

$\rightarrow C = y_0$

Ex. lösning till (*): $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

Ex. lösning i t_k: $y(t_k) = y_0 e^{\lambda t_k}$

Approxim. lösning till (*) [framåt Eulers m.]: $y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k =$

$= (1+h\lambda) y_k = (1+h\lambda)^k y_0$

Globala felet: $y(t_k) - y_{k+1} =$

$$= y_0 e^{\lambda t_k} - (1+h\lambda)^k y_0 = [\underbrace{1 + k\lambda h + \frac{(k\lambda h)^2}{2} + \dots}_{\text{Taylor för } e^{\lambda t_k}}] y_0$$

$$- [\underbrace{1 + k\lambda h + \frac{k(k-1)}{2}(\lambda h)^2 + \dots}_{\text{Taylor för } (1+\lambda h)^k}] y_0 = -\frac{1}{2}\lambda^2 t_k y_0 h$$

$O(h) \rightarrow$ Eulers framåt metod är första ordn. metod

Taylor's f. för $(1+\lambda h)^k$ i punkten $\lambda_0 h_0$:

$$f(\lambda h) = \underbrace{(1+\lambda_0 h_0)^k}_{f(\lambda_0 h_0)} + \underbrace{k(1+\lambda_0 h_0)^{k-1}}_{f'(\lambda_0 h_0)} \cdot (\lambda h - \lambda_0 h_0)$$

$$+ \frac{k(k-1)(1+\lambda_0 h_0)^{k-2}}{2} \cdot (\lambda h - \lambda_0 h_0)^2$$

För $\lambda_0 h_0 = 0$:

$$f(\lambda h) = 1 + k\lambda h + \frac{k(k-1)(1+0)^{k-2}(\lambda h)^2}{2} + \dots$$

Framåt Eulers metod:

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$$

för problemet

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(**) \quad y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = \underbrace{(1+h\lambda)}_{<1} y_k$$

Vi ska kräva för konvergens

$$|1 + h\lambda| < 1$$

$$\downarrow$$

$$-1 < 1 + h\lambda < 1$$

$$\downarrow$$

$$\lambda < 0 \rightarrow \boxed{0 < h|\lambda| < 2}$$

Stabilitetskrav för (**) för (*) och för framåt Eulers metod

Om λ stort $\rightarrow$ h ska vara litet.

$$\Leftarrow \quad h < \frac{2}{|\lambda|}$$

tidssteget $h = t_{k+1} - t_k$

Framåt Eulers metod

$$(*)\begin{cases} y' = \lambda y_{\,f(t,y)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y' \approx \frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau}, \quad \text{sätt in i } (*):$$

$$\frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau} = \overbrace{\boxed{\lambda y^{k}}}^{f(t^k, y^k)} \leftarrow \text{för framåt Euler}$$

Framåt Euler

$$\boxed{y^{k+1} = y^{k} + \tau \lambda y^{k} = (1 + \tau\lambda) y^{k}}$$

för stabilitet $\leftarrow$ $|1 + \tau\lambda| < 1 \Rightarrow 0 < h|\lambda| < 2$

Bakåt Euler:

$$y' \approx \frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau} \to \frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau} = \overbrace{\boxed{\lambda y^{k+1}}}^{f(t^{k+1}, y^{k+1})}$$

för Bakåt Euler

$$y^{k+1} = y^{k} + \tau\lambda y^{k+1}$$

$$y^{k+1} - \tau\lambda y^{k+1} = y^{k}$$

$$(1 - \tau\lambda) y^{k+1} = y^{k}$$

$$\boxed{y^{k+1} = (1 - \tau\lambda)^{-1} y^{k}} \leftarrow \text{Bakåt Euler}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = f$$

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau}$$

$$\frac{y^{k+1} - y^{k}}{\tau} \approx f(t^{k}, y^{k})$$

Expelicit Euler's m.

$$\boxed{y^{k+1} = y^{k} + \tau \cdot f(t^{k}, y^{k})}$$

Impelicit Euler's m.:

$$y^{k+1} = y^{k} + \tau \cdot f(t^{k+1}, y^{k+1})$$

$$\left(y^{k+1} - \tau f(t^{k+1}, y^{k+1})\right) = y^{k}$$

käänt

käänt

$$A \cdot y^{k+1} = y^{k}$$