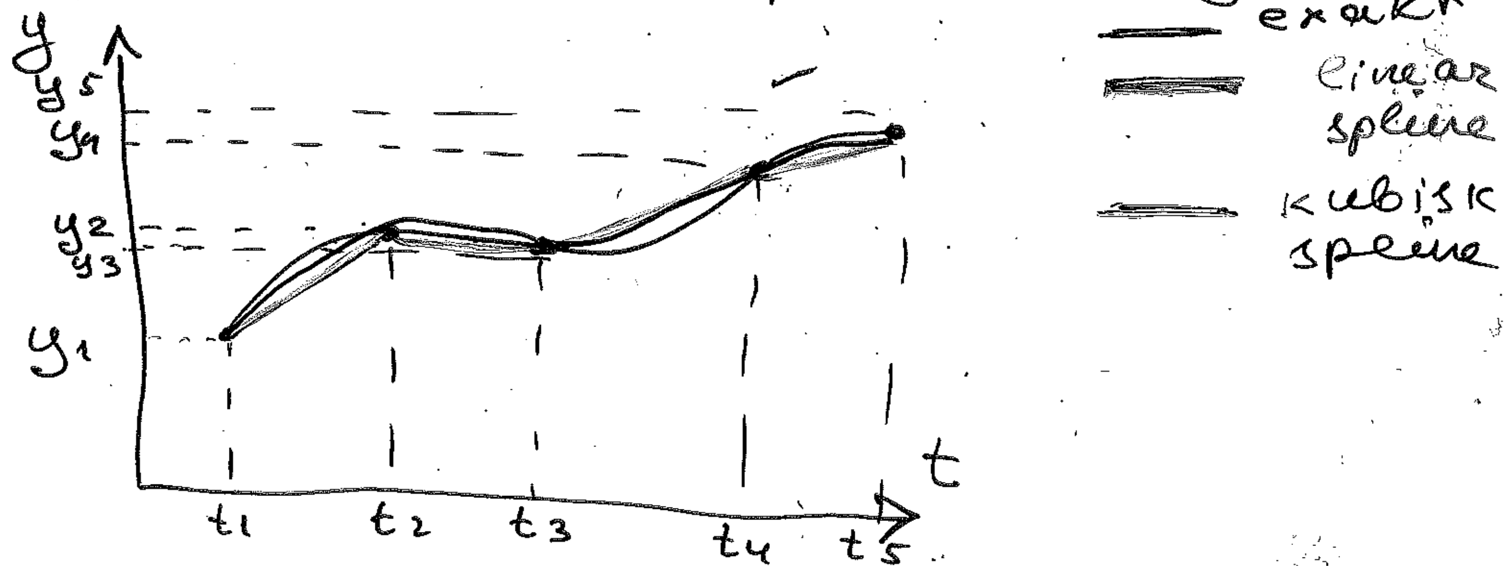
Splinefunktioner

Splinefunktion av grad j är en funktion som interpolerar (t_k, y_k), $k = 1, \dots, n$, och som består av styckvisa polynom på varje interval $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, n-1$.
Splines är $j-1$ gånger kontinuerligt deriverbar i knutpunkterna (t_k, y_k).



1) Linear spline: $p(t) = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 t}_{\text{polynom av grad}}$

och då $j = 1 \rightarrow$ ingen kont. derivat i t_k.

2) Kvadratisk. spline = andragradspolynom: $p(t) = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2}$

polynom av grad 2 och $j = 2$: spline är $2-1 = 1$ kont. deriverbar

3) Kubisk spline: $p(t) = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3}$

polynom av grad 3 och $j = 3$: spline är $3-1 = 2$ gånger kont. deriverbar

Splines

1) linear spline:

delpolynom är: $\boxed{p(t) = \underbrace{d_1 + d_2}_{\text{ska bestämmas}} t}$

Ska bestämmas $2(n-1)$ koefficienter för n punkter.

Interpol. krav ger $2(n-1)$ villkor (varje polynom interpolerar två (t_k, y_k) och (t_{k+1}, y_{k+1}) knutpunkter

För linear spline att bestämma $2(n-1)$ koef. vi har $\overset{ok}{=}$ $2(n-1)$ villkor.

2) kvadratisk spline:

delpolynom är: $\boxed{p(t) = \underbrace{d_1 + d_2 t + d_3}_{\text{ska bestämmas}} t^2}$

Ska bestämmas $3(n-1)$ koef. för n punkter.

a) Interp. krav ger $2(n-1)$ villkor

b) Kont. första derivata $p'(t) \in C$ ger $n-2$ villkor.

c) Vi kan kräva: $p_1''(t_1) = 0$ eller $p_n''(t_n) = 0$

Antalet ekvationer: $\underbrace{2(n-1)}_{\text{från a)}} + \underbrace{n-2}_{\text{från b)}} + \underbrace{1}_{\text{från c)}} \overset{\text{ok, stämmer}}{=} \underbrace{3(n-1)}_{\text{antalet koef. som ska bestämmas}}$

3) Kubisk spline: $\boxed{p(t) = \underbrace{d_1 + d_2 t + d_3 t^2 + d_4}_{\text{ska bestämmas } 4(n-1) \text{ koef.}} t^3}$

a) Interp. krav ger $2(n-1)$ villkor.

b) Kont. första derivata $p'(t) \in C$ ger $n-2$ villkor

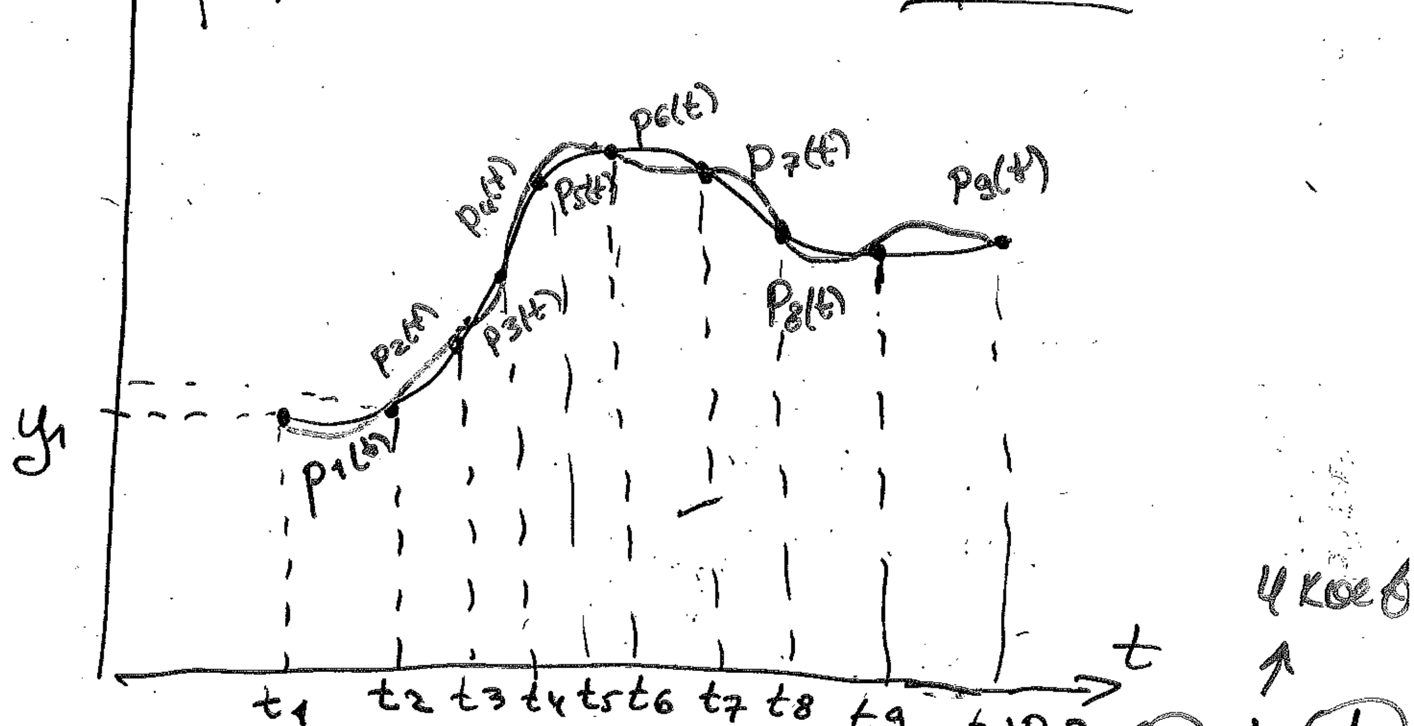
c) Kont. andra derivata $p''(t) \in C$ ger $n-2$ villkor

d) Vi kan kräva $p''(t_1) = p_n''(t_n) = 0$

$\underbrace{(2(n-1)}_{a)} + \underbrace{2(n-2)}_{} + \underbrace{2)}_{d)} \overset{ok}{=} \underbrace{4(n-1)}_{\text{antalet koef.}}$

Splines

Kubisk / kvadratisk spline

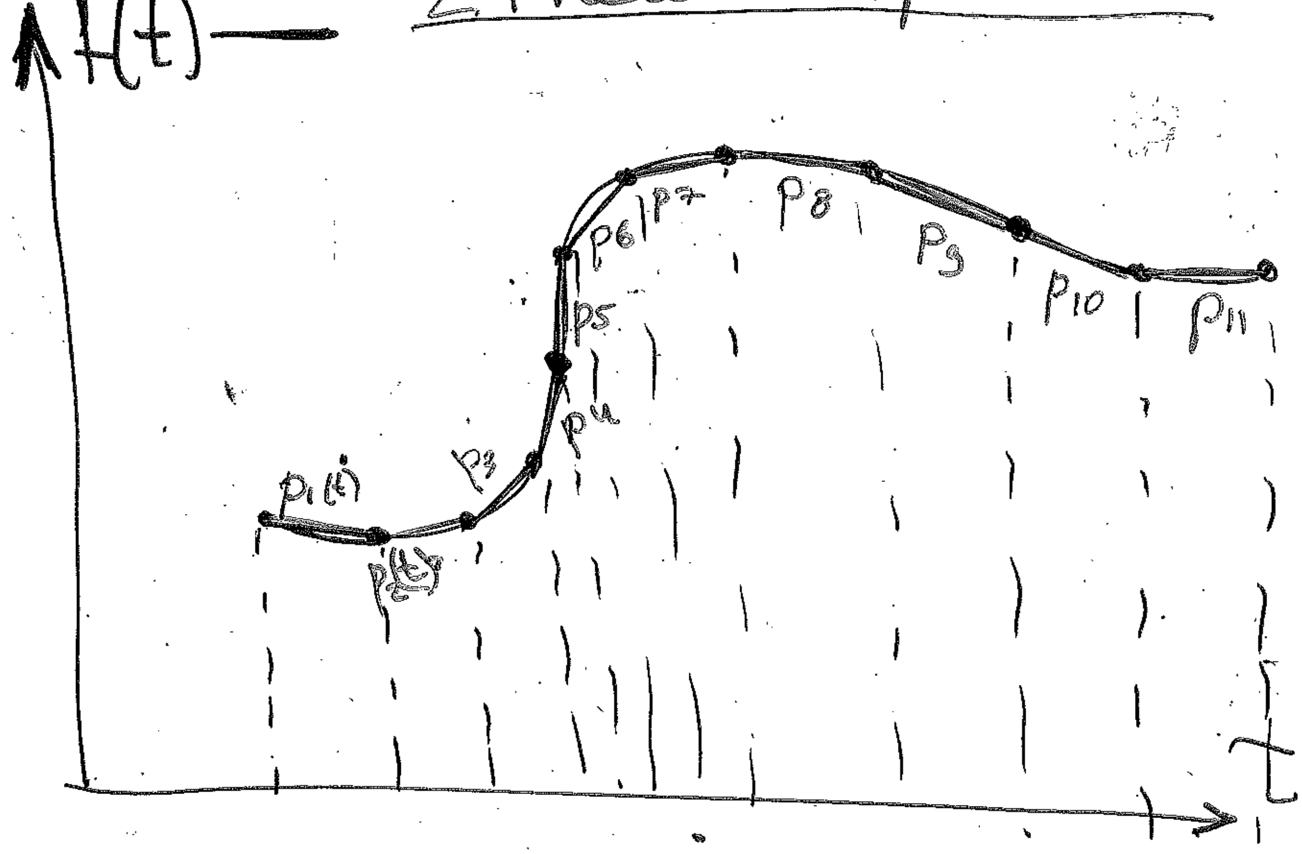


4 koef

Kubisk spline: $p_k(t) = a_k t^3 + b_k t^2 + c_k t + d_k$

Kvadratisk spline: $p_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k$ → 3 k.

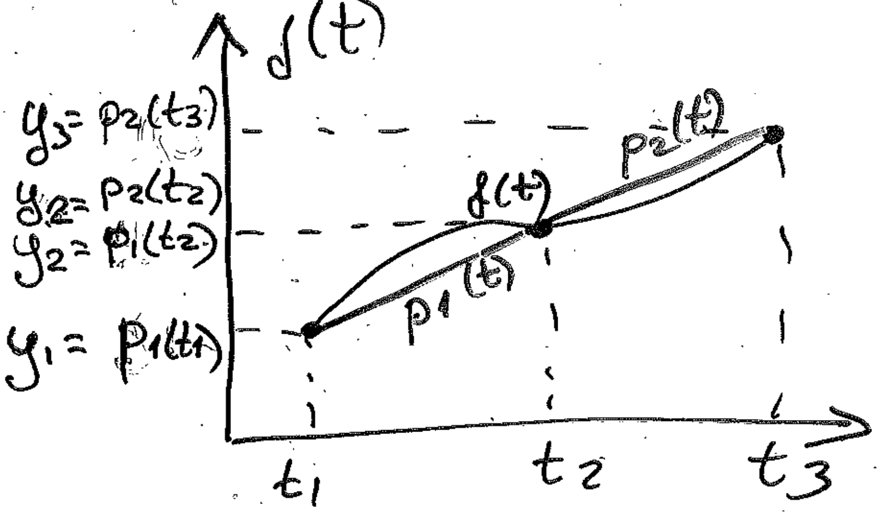
Linear spline



Linear spline:

$p_k(t) = a_k t + b_k$ → 2 koef. ska bestämma

Linear splines för t_1, t_2, t_3



$p_1(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$

$p_2(t) = \beta_1 t + \beta_2$

4 koef. ska bestämmas
2 koef. på varje intervall:

$2(n-1)$ koef. $= 2\cdot(3-1) = 2\cdot 2 = 4$

$$p_1(t_1) = y_1 = \alpha_1 t_1 + \alpha_2$$
$$p_1(t_2) = y_2 = \alpha_1 t_2 + \alpha_2$$

$p_1(t_2) = p_2(t_2) \rightarrow y_2 = y_3$

$$p_2(t_2) = y_2 = \beta_1 t_2 + \beta_2$$
$$p_2(t_3) = y_3 = \beta_1 t_3 + \beta_2$$

Systemet $Ax = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 1 \\ 0 & 0 & t_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Interpolationskravet ger $2(n-1)$
$\rightarrow$ varje linear spline ska interpolera 2 knutpunkter. I vårt fall: $2(3-1) = 4$ interpol. krav.

I allmänt fall: för n punkter för linjär spline ska bestämmas $2(n-1)$ koefficienter.

Interp. krav ger redan $2(n-1)$ villkor.

Linear spline

interp. villkor

1) $p_1(t_1) = y_1 = \alpha_1 t_1 + \alpha_2$

2) $p_1(t_2) = y_2 = \alpha_1 t_2 + \alpha_2$

3) $p_2(t_2) = y_2 = \beta_1 t_2 + \beta_2$

4) $p_2(t_3) = y_3 = \beta_1 t_3 + \beta_2$

$\boxed{2),3)}$ $\alpha_1 t_2 + \alpha_2 = \beta_1 t_3 + \beta_2$

kan skrivas som

Systemet också kan skrivas som

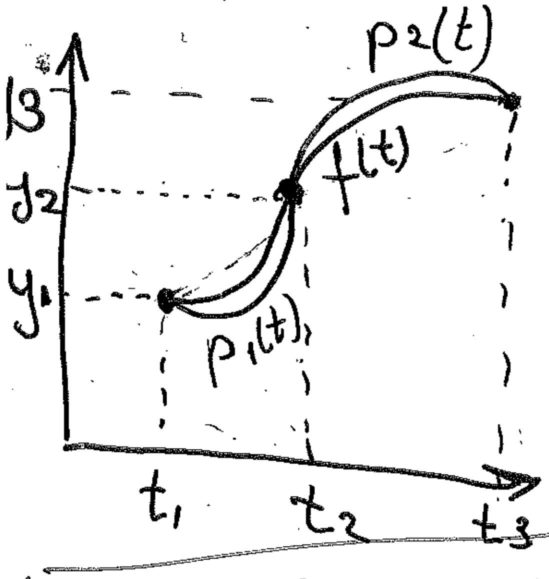
$$\underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 1 & t_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2$$

Normalekvatione löser problemet.

$$A^T A x = A^T b$$

$$x = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{A^+} b$$



Kubisk spline

Vi ska bestämma 8 koeff: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$

$$\boxed{\begin{aligned} p_1(t) &= \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 \\ p_2(t) &= \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 t^3 \end{aligned}}$$

Villkor för spline:

1) 1) $p_1(t_1) = y_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t_1 + \alpha_3 t_1^2 + \alpha_4 t_1^3$

2) $p_1(t_2) = y_2 = \alpha_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_2^2 + \alpha_4 t_2^3$

2) 3) $p_2(t_2) = y_2 = \beta_1 + \beta_2 \cdot t_2 + \beta_3 t_2^2 + \beta_4 t_2^3$

4) $p_2(t_3) = y_3 = \beta_1 + \beta_2 \cdot t_3 + \beta_3 t_3^2 + \beta_4 t_3^3$

3) $p_1'(t_2) \in C \rightarrow p_1'(t_2) = p_2'(t_2)$

$p_1'(t) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t + 3\alpha_4 t^2$

$p_2'(t) = \beta_2 + 2\beta_3 t + 3\beta_4 t^2$

Vi ska ha $p_1'(t_2) = p_2'(t_2) \Rightarrow$

$p_1'(t_2) = \alpha_2 + 2\alpha_3 t_2 + 3\alpha_4 (t_2)^2 =$
$= \beta_2 + 2\beta_3 t_2 + 3\beta_4 (t_2)^2 = p_2'(t_2)$

4) $p_1''(t_2) \in C \rightarrow p_1''(t_2) = p_2''(t_2)$

$p_2''(t) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t$

$p_1''(t) = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t$

6) $p_2''(t_2) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t_2 =$
$= 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t_2 = p_1''(t_2)$

Två tilläggsvillkor:

$$\underbrace{p_1''(t_1) = 0}_{p_1''(t) = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 t}, \quad \underbrace{p_2''(t_3) = 0}_{p_2''(t) = 2\beta_3 + 6\beta_4 t} :$$

7) $2\alpha_3 + 6\alpha_4 \cdot t_1 = 0$

8) $2\beta_3 + 6\beta_4 \cdot t_3 = 0$

Nu har vi 8 ekvationer och 8 kocb.
Vi ska skriva alla ekvationer i ett system

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \\ 5) \\ 6) \\ 7) \\ 8) \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 & 0 & -1 & -2t_2 & -3t_2^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_2 & 0 & 0 & -2 & -6t_2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6t_3 \end{bmatrix}}_{A} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{2 tilläggsvillkor} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

$$= \left.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} b \qquad \Longrightarrow \quad A \cdot x = b$$

Kapitel 7, övn. 6

Givet punkter $(-1,2)$, $(0,3)$ och $(1,6)$ bestäm interpolationspolynom av grad 2

a) med basfunktioner t_i^j

b) på Lagranges form

c) på Newtons form.

Visa att vi får samma polynom i 3 fall

Svar:

Vi definerar polynom av grad 2:

$$p(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

a) Om basfunktioner är t_i^j:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

Vi får $x = [3, 2, 1]^T$ då $p(t) = 3 + 2t + t^2$.

b) Lagranges form:

$$p(t) = 2 \frac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 3 \cdot \frac{(t-(-1))(t-1)}{(0-(-1))(0-1)} +$$

$$+ 6 \cdot \frac{(t-(-1))(t-0)}{(1-(-1))(1-0)}.$$

c) Newton's form: $p(t) = x_1 + x_2(t-t_1) + x_3(t-t_1)(t-t_2)$; $p(t_1) = x_1$; $p(t_2) = x_1 + x_2(t_2-t_1)$; $p(t_3) = x_1 + x_2(t_3-t_1) + x_3(t_3-t_1)(t_3-t_2)$:

$1; 0; 0$

$1; t_2-t_1; 0$

$1; t_3-t_1; (t_3-t_1)(t_3-t_2)$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Kapitel 7, Övn. 7

Hur beräknar vi

$$p(t) = 5t^3 - 3t^2 + 7t - 2$$

med hjälp av Horners metod?

<u>Svar:</u>

Exempel för $n=4$:

$$x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 = x_1 + t\big(\underbrace{x_2 + t(\underbrace{x_3 + t\overset{p}{x_4}}_{x_3+tp})}\big)$$

I Matlab:

$p = x_4;$

$p = x_3 + tp$

$p = x_2 + tp$

$p = x_1 + tp$

I vårt fall: $p(t) = \overset{x_1}{-2} + \overset{x_2}{7}t \overset{x_3}{-3}t^2 + \overset{x_4}{5}t^3 =$

$= -2 + t(7 + t(-3 + 5t))$

I Matlab:

$p = 5$

$p = -3 + tp \Rightarrow -3 + t\cdot 5$

$p = 7 + tp \Rightarrow 7 + t\cdot(-3 + t\cdot 5)$

$p = -2 + tp \Rightarrow -2 + t\cdot(7 + t\cdot(-3 + t\cdot 5))$

Kapitel 7, Övning 9.

Vi vill interpolera $(t_k, y_k), k=1,\dots,n$ med $n-1$ styckvis kvadratiska polynom sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k).

Svar: Se förel. sidor 210 – 212:

En andragradspolynom kan skrivas som

måste bestämmas

$$\boxed{p_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k}$$

på varje intervallet $[t_k, t_{k+1}]$.

Antalet obestämda koefficienter a_k, b_k, c_k är $3(n-1)$

koeff. på varje interval — antalet av interval

Hur många villkor har vi?

1) Interpolationskravet ger oss $2(n-1)$: varje polynom $p_k(t)$ måste interpolera 2 knutpunkter t_k, t_{k+1}:

$$\begin{cases} p_k(t_k) = a_k t_k^2 + b_k t_k + c_k = y_k \\ p_k(t_{k+1}) = a_k t_{k+1}^2 + b_k t_{k+1} + c_k = y_{k+1} \end{cases}$$

2) Kontinuerlig första derivata $p_k(t) \in C$ ger $n-2$ villkor (i inre punkter).

Summan är: $2(n-1) + n-2 = 3n-4$ antalet ekvationer

Vi ser att $\underbrace{3(n-1)}_{\text{antalet koefficienter}} = 3n-3 > \underbrace{3n-4}_{\text{antal ekvationer}}$,

→ Vi saknar 1 villkor: Vi kan kräva $p_1''(t_1) = 0$; $p_k''(t_n) = 0$