Tentamen: Numerisk Analys
MMG410, GU
2018-06-01, SB

- Skrivtid: 14.00-18.00.
- Ansvarig: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036, e-post: larisa@chalmers.se.
- Vakt: Larisa Beilina, tel 772 35 67, 070 -417 7036
- Resultat: e-post från LADOK.
- Betygsgränser: 12 poäng, av maximalt 25, räcker för godkänt, 18 poäng för VG.
- Lösningsförslag: på www. Jag kommer meddela på www-sidan när tentan är rättad.
- Hjälpmedel: inga (förutom godkända ordlistor).

Iakttag följande:

- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs! Specialfall ger inga poäng, när allmänna lösningar krävs.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom alla uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Ge kortfattade motiveringar/lösningar till nedanstående uppgifter! Ett korrekt svar utan motivering ger inga poäng!

- a) Beräkna LU-faktoriseringen av matrisen nedan. När är matrisen singulär?

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ c & b \end{bmatrix}$$

  (1p)
- b) Skriv talet -2.5 i binär form som flyttal i dator. Skriv den sedan i hexadecimalt (bas 16) form **(3p)**
- c) Visa att en positivt definit matris A är ickesingulär och att inversen är positivt definit.
  (2p)
- d) Sätt upp Newton's metod för lösningen av ekvationen $x^2 - x - 2 = 0$. Skriv fixpunktsiterationsmetod som svarar mot Newtons metod. Bestäm fixpunkterna och konvergens för fixpunktsiterationsmetod.
  (3p)

2. Vi har givet tre ytor i det tredimensionella rummet och vi vill numeriskt ta reda på om det finns någon skärningspunkt mellan de tre ytorna.

Ställ upp ett system av ekvationer för problemet och formulera sedan Newton's metod för detta system. De tre ytorna har ekvationer:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x^4 - 3x^2y^2 + \cos(yz^3) &= 4, \\ x^2 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$

Försök inte att lösa systemet för hand.

(3p)

---

3. Vi vill interpolera (t_k, y_k), $k = 1, ..., n$ med $n - 1$ styckvis kvadratiska polynom $p_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k$ sådana att knutpunkterna sammanfaller med (t_k, y_k). Hur många kontinuerliga derivator kan vi kräva av interpolanten? Vad är antalet obestämda koefficienter och hur många villkor har vi ?

(2p)

4.

- Vi har en kvadraturformel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

  för lämpliga punkterna x_1, x_2 och vikterna w_1, w_2. Gör linjär transformation och skriv hur ser motsvarande kvadraturformel ut på intervalet $[-1, 6]$?

  (2p)
- Bestäm den interpolerande splinefunktionen av grad ett som interpolerar i punkterna $(2, 2)$, $(3, 4)$ oh $(4, 8)$.

  (2p)

5.

- a) Skriv om följande problem som första ordningens system:

$$\begin{cases} x''(t) = t + x(t) \cdot x'(t) \cdot y(t) + y'(t), \\ y''(t) = (1 + (x(t))^2) \cdot (y(t) - \frac{x(t)}{x'(t)+t}), \\ x(-1) = 1, \\ x'(-1) = 1, \\ y(-1) = 0, \\ y'(-1) = -0.1. \end{cases}$$

  (2p)

- b) Sätt upp explicit Eulers eller Framåt-Eulers metod och första iteration i den för problemet

$$\begin{cases} y'(t) = x(t) + 2t, \\ x'(t) = y(t) - 2ty(t) + x(t) - t + 1, \\ y(0) = 0, \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

(**2p**)

---

6. Vi har en matematisk modell där c är kopplat till t på följande sätt:

$$c \approx 10^{\alpha}\ e^{\frac{\alpha}{\beta}t - \gamma t^2}$$

där α, β och γ är parametrar i modellen. Vi vill bestämma parametrarna α, β och γ givet mätvärden $(t_1, c_1), (t_2, c_2), ..., (t_m, c_m), c_k > 0$. Gör lämpliga transformationer och variabelbyten och ställ upp ett linjärt minstakvadratproblem. Matrisen A samt vektorerna b oh x skall redovisas! Visa också hur vi erhåller parametrarna från x.
(**3p**)